

И. О. ХИНЦЕ

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

И. О. ХИНЦЕ

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ ЕЕ МЕХАНИЗМ И ТЕОРИЯ

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО
О. В. ЯКОВЛЕВСКОГО

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
Г. Н. АБРАМОВИЧА



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1963

TURBULENCE

AN INTRODUCTION TO ITS MECHANISM AND THEORY

J. O. HINZE

Professor of Fluid Mechanics
Technological University, Delft

McGRAW-HILL BOOK COMPANY, INC.

NEW YORK TORONTO LONDON

1959

И. О. Хинце

Турбулентность, ее механизм и теория

М., Физматгиз, 1963 г., 680 стр. с илл.

Редактор *Н. И. Розальская.*

Техн. редактор *В. Н. Крючкова.*

Корректор *Т. С. Плетнёва.*

Сдано в набор 15/V 1963 г.

Подписано к печати 17/X 1963 г.

Бумага 60×90¹/₁₆.

Физ. печ. л. 42,5.

Условн. печ. л. 42,5.

Уч.-изд. л. 42,59.

Тираж 6000 экз.

Цена книги 2 р. 33 к. Заказ № 1457.

Государственное издательство физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УЦБ и ПП Ленсовнархоза,
Ленинград, Измайловский пр., 29.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие редактора перевода	6
Из предисловия автора	7
Глава 1. Общее введение и основные понятия	9
§ 1. 1. Определение турбулентности и вводные понятия	9
§ 1. 2. Уравнения движения турбулентного потока; рейнольдсовы напряжения	23
§ 1. 3. Уравнение сохранения транспортабельной скалярной субстанции в турбулентном потоке	36
§ 1. 4. Двойные корреляции между компонентами турбулентных пульсаций скорости	37
§ 1. 5. Изменение двойных корреляций скорости по времени; тройные корреляции скорости	43
§ 1. 6. Свойства двойных продольных и поперечных корреляций при однородной турбулентности	47
§ 1. 7. Макро- или интегральный масштаб турбулентности	50
§ 1. 8. Эйлеровы временные корреляции	53
§ 1. 9. Турбулентная диффузия жидких частиц; лагранжевы корреляции	56
§ 1.10. Сводка корреляций	65
§ 1.11. Эмпирические формулы для двойных корреляций	67
§ 1.12. Одномерный энергетический спектр по Тэйлору	71
§ 1.13. Энергетические соотношения для турбулентного течения	80
Глава 2. Принципы методов и приборов для измерений в турбулентных потоках	91
§ 2. 1. Введение	91
§ 2. 2. Термоанемометр	94
§ 2. 3. Метод постоянного тока	100
§ 2. 4. Измерение характеристик турбулентности с помощью термоанемометра; метод постоянного тока	125
§ 2. 5. Измерение пульсаций температуры и концентрации термоанемометром; метод постоянного тока	137
§ 2. 6. Метод постоянной температуры	142
§ 2. 7. Ограничения термоанемометра	145
§ 2. 8. Анемометр с электрическим разрядом	148
§ 2. 9. Метод электромагнитной индукции	151
§ 2.10. Методы, основанные на визуализации течения	153
§ 2.11. Измерение осредненных величин статического давления и скорости	160

Глава 3. Изотропная турбулентность	169
§ 3. 1. Введение	169
§ 3. 2. Корреляционные тензоры	171
§ 3. 3. Дифференциальное уравнение динамики изотропной турбулентности	187
§ 3. 4. Пространственный энергетический спектр	195
§ 3. 5. Динамическое уравнение энергетического спектра	206
§ 3. 6. Вырождение изотропной турбулентности	242
§ 3. 7. Скалярное поле при изотропной турбулентности	259
§ 3. 8. Пульсации давления при изотропной турбулентности	283
§ 3. 9. Замечания о влиянии сжимаемости	289
Глава 4. Неизотропная турбулентность	293
§ 4. 1. Введение	293
§ 4. 2. Динамика одноточечной корреляции скорости $\overline{u_i u_j}$	295
§ 4. 3. Динамика двухточечной корреляции скорости $\overline{(u_i)_A (u_j)_B}$	301
§ 4. 4. Динамическое уравнение энергетического спектра	306
Глава 5. Процессы переноса в турбулентных потоках	322
§ 5. 1. Введение	322
§ 5. 2. Теория пути смещения и феноменологические теории	324
§ 5. 3. Аналогии при турбулентном переносе	344
§ 5. 4. Диффузия при однородной турбулентности	353
§ 5. 5. Диффузия от неподвижного источника в равномерном потоке	380
§ 5. 6. Диффузия от неподвижного источника в турбулентном потоке со сдвигом	400
§ 5. 7. Диффузия дискретных частиц при однородной турбулентности	412
§ 5. 8. Влияние сжимаемости	427
Глава 6. Неизотропная свободная турбулентность	438
§ 6. 1. Введение	438
§ 6. 2. Приближенные предположения, используемые для упрощения уравнений движения	441
§ 6. 3. Распределение скорости в следе за цилиндром по классическим теориям	448
§ 6. 4. Перенос скалярной субстанции в следе за цилиндром	454
§ 6. 5. Результаты измерения распределений осредненной скорости и осредненной температуры в следе за цилиндром	457
§ 6. 6. Измерение характеристик турбулентности в следе за цилиндром	462
§ 6. 7. Распределение скорости в круглой свободной струе по классическим теориям	471
§ 6. 8. Перенос скалярной субстанции в круглой свободной струе	484
§ 6. 9. Измерение распределения осредненной скорости и осредненной температуры в круглой свободной струе	488
§ 6.10. Измерение характеристик турбулентности в круглой свободной струе	501
§ 6.11. Структура свободного турбулентного потока со сдвигом и процессы переноса	510
Глава 7. Неизотропная «пристеночная» турбулентность	522
§ 7. 1. Введение	522
§ 7. 2. Приближенные уравнения движения и соответствующие интегральные соотношения	524

§ 7. 3. Ламинарный пограничный слой и явление перехода	534
§ 7. 4. Турбулентный пограничный слой на плоской пластине. Классические теории	538
§ 7. 5. Экспериментальные данные о распределении осредненной скорости	551
§ 7. 6. Измерение характеристик турбулентности в пограничном слое	563
§ 7. 7. Сводка результатов и новые формулы для распределений осредненной скорости и напряжения сдвига	581
§ 7. 8. Турбулентное течение в прямой круглой трубе. Распределение осредненной скорости	593
§ 7. 9. Измерение характеристик турбулентности при течении в трубе	601
§ 7.10. Структура турбулентного потока в трубе	614
§ 7.11. Перенос скалярной субстанции при пристеночной турбулентности	619
§ 7.12. Отдельные задачи пристеночной турбулентности	637
Приложение. Элементы тензорного исчисления в декартовой системе координат	651
Литература	661
Именной указатель	672
Предметный указатель	677

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Теория турбулентных течений представляет собой важнейший для практики и одновременно наиболее трудный раздел гидродинамики. Имеющиеся экспериментальные данные о структуре турбулентности являются далеко не полными. Существующие теории турбулентности делятся на две категории: в первой оперируют осредненными характеристиками потока, который считается квазистационарным (например, в теории пути смещения Прандтля); во второй используют статистические особенности структуры турбулентности (теория Колмогорова). В работах первого направления удастся получить суммарные характеристики потока (напряжение трения и т. д.); работы второго направления пока еще такой возможности не дают, но являются более перспективными, так как опираются на близкую к действительности модель турбулентности.

Успешное развитие теории турбулентности должно основываться на обширных и детальных фактических сведениях о микро- и макро-структуре турбулентных течений, а это, в свою очередь, требует развития новых тонких методов диагностики таких течений.

Книга И. Хинце «Турбулентность», вышедшая в 1959 году в США, отражает современные представления о физической сущности турбулентности, содержит изложение важнейших теорий, методов и результатов экспериментальных исследований. Главное внимание уделено статистическим теориям, с помощью которых получены некоторые нетривиальные результаты.

Современность, полнота и ясность изложения материала делают монографию И. Хинце весьма полезной и доступной не только для научных работников, но также для широких кругов инженеров и студентов, интересующихся вопросами турбулентных течений.

Наряду с известной монографией А. Таунсенда, книга И. Хинце является важнейшим вкладом в гидродинамику турбулентных течений.

Г. Абрамович

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА

Основным материалом для создания настоящей книги послужило содержание цикла лекций, прочитанных автором группе инженеров-химиков лабораторий фирмы «Ройял Датч-Шелл» в Амстердаме и Дельфте в 1950 году.

Цель этого курса состояла в том, чтобы познакомить слушателей с современными представлениями и теориями турбулентного течения жидкости и при этом дать им теоретическую базу, достаточную не только для изучения специальной литературы по турбулентности, но и для самостоятельных теоретических исследований тех проблем химической технологии, в которых турбулентность играет существенную роль, например перемешивания, а также тепло- и массообмена.

Книга, по существу, преследует ту же цель, однако содержание ее расширено, видоизменено и приведено в соответствие с последними достижениями в этой области. Она будет, по-видимому, представлять интерес для научных работников не только в области химической технологии, но и прикладной механики, поскольку в ней уделено особое внимание анализу механизма турбулентности в применении к задачам сопротивления течению, а также к задачам тепло- и массообмена.

Соответственно этому был сделан и выбор проблем, подлежащих рассмотрению. В книге затронуты не все вопросы, связанные с турбулентностью, поскольку в намерения автора не входило создание учебника по турбулентности. Так, теория устойчивости течения и переход ламинарного течения в турбулентное не рассмотрены вовсе, а влияния сжимаемости жидкости на различные явления турбулентности автор касался лишь от случая к случаю.

Автор пытался представить предмет рассмотрения таким образом, чтобы облегчить восприятие его читателями, которые не являются еще специалистами в гидродинамике. Однако, хотя изложение начинается с самых основных понятий, а использование математики сведено к минимуму, все же, если читатель намерен успешно ознакомиться с содержанием книги, то он должен обладать необходимым кругом знаний в области математики и физики.

Материал главы 1 служит, прежде всего, общим введением, которое знакомит читателя с различными специальными понятиями теории турбулентности. Кроме того, здесь выводятся основные формулы, которые используются в качестве исходных соотношений в других главах.

В главе 2 описываются методы и аппаратура, обычно применяемые для измерения количественных характеристик турбулентности. Эти вопросы рассмотрены более подробно, нежели можно было бы ожидать. Поводом для этого послужили соображения о целесообразности познакомить инженера-исследователя с существующими методами и присущими им особенностями, с тем чтобы вооружить его для критического анализа и интерпретации экспериментальных данных.

В главе 3 излагаются общеизвестные теории изотропной турбулентности. Представляется, что эти теории рассмотрены здесь достаточно полно, чтобы послужить в качестве отправной точки для дальнейшего теоретического изучения турбулентности.

В отличие от изотропной турбулентности, теоретические сведения о неизотропной турбулентности значительно беднее. Некоторые из наиболее важных попыток разработки статистической теории подобного рода турбулентности рассмотрены в главе 4.

Типичным для турбулентных течений является диффузионный характер процессов переноса, что связано с неупорядоченностью турбулентных движений. Эту характерную особенность турбулентности можно, по-видимому, считать настолько определяющей, что этим оправдывается рассмотрение теоретических и экспериментальных исследований процессов переноса в отдельной главе (глава 5).

Две последние главы, 6 и 7, имеют дело соответственно с не-изотропной свободной турбулентностью и с турбулентным течением вдоль твердой стенки.

Приложение содержит краткое введение в тензорное исчисление в декартовых координатах, которое можно признать полезным в связи с широким использованием в книге понятий и формул тензорного анализа.

Полный перечень условных обозначений для каждой главы приводится в конце главы.

И. О. Хинце

ГЛАВА 1

ОБЩЕЕ ВВЕДЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

§ 1.1. Определение турбулентности и вводные понятия

Термин «турбулентность» является в настоящее время общепринятым, и, вообще говоря, его смысл понятен, по крайней мере людям, имеющим дело с техникой. Тем более любопытно отметить, что слово «турбулентный» для характеристики определенного типа течения, а именно антипода ламинарного (слоистого) движения, стало использоваться сравнительно недавно. Осборн Рейнольдс, один из пионеров изучения турбулентных течений, называл этот тип движения «извилистым».

Турбулентность является довольно знакомым понятием; однако его нелегко определить так, чтобы охватить все присущие турбулентности характерные особенности и сделать это определение соответствующим современным воззрениям на турбулентность, распространенным среди профессионалов в этой области прикладной науки.

Согласно «Новому международному словарю» Вебстера, турбулентность означает: возбуждение, сморщивание, возмущение... Однако это определение является слишком общим и не может удовлетворительно характеризовать турбулентное движение жидкости, как оно понимается сегодня. В 1937 году Тэйлор и Карман [1] *) дали следующее определение: «Турбулентность — это неупорядоченное движение, которое в общем случае возникает в жидкостях, газообразных или капельных, когда они обтекают непроницаемые поверхности или же когда соседние друг с другом потоки одной и той же жидкости следуют рядом или проникают один в другой». Согласно этому определению, рассматриваемое течение должно удовлетворять условию неупорядоченности.

В самом деле, неупорядоченность является очень важной особенностью. Вследствие неупорядоченности не представляется возможным описать движение во всех деталях как функцию времени и простран-

*) Цифры в квадратных скобках указывают на литературу, помещенную в конце книги к каждой главе в отдельности.

ственных координат. Но, к счастью, турбулентное движение не упорядочено в таком смысле, что поддается описанию с помощью законов теории вероятности. При этом оказывается возможным указать точные средние значения различных величин, например: скорости, давления, температуры и т. п., что является весьма важным обстоятельством. Если бы турбулентное движение было полностью неупорядоченным, оно не поддавалось бы никакому математическому анализу.

Поэтому недостаточно лишь констатировать, что турбулентность — это неупорядоченное движение, и остановиться на этом. Определение турбулентности может быть сформулировано, по-видимому, несколько более точно следующим образом: турбулентное движение жидкости предполагает наличие неупорядоченности течения, в котором различные величины претерпевают хаотическое изменение по времени и пространственным координатам и при этом могут быть выделены статистически точные их осредненные значения.

Добавление «по времени и пространственным координатам» является необходимым, так как недостаточно определить турбулентное движение как неупорядоченное только по времени. Возьмем, к примеру, случай, когда данное количество жидкости движется как целое неупорядоченным образом; тогда движение каждой части жидкости будет неупорядоченным по времени относительно неподвижного наблюдателя, но не по отношению к наблюдателю, движущемуся вместе с жидкостью. Турбулентное движение нельзя также мыслить как неупорядоченное только в пространстве, ибо в этом случае под определением турбулентности попадало бы и установившееся течение с нерегулярными линиями тока.

Как указали в своем определении Тэйлор и Карман, турбулентность может быть возбуждена силами трения вблизи неподвижных стенок (течение в трубопроводах, след за телом) или при течении слоев жидкости с различными скоростями вдоль или поперек друг друга. Как будет ясно из дальнейшего, между видами турбулентности, возбужденной в каждом из этих двух случаев, существует резкое различие. Поэтому целесообразно называть турбулентность, возбужденную неподвижной стенкой и непрерывно подвергающуюся ее влиянию, «пристеночной турбулентностью», а турбулентность при отсутствии твердых стенок — общепринятым термином «свободная турбулентность».

В случае реальной вязкой жидкости влияние вязкости проявляется в преобразовании кинетической энергии потока в тепло; следовательно, турбулентный поток, как и любое течение такой жидкости, является по своей природе диссипативным. Если отсутствует непрерывный внешний источник энергии, необходимой для непрерывного возбуждения турбулентного движения, то это движение вырождается. Другие проявления вязкости приводят к тому, что турбулентность

становится более однородной и менее зависимой от направления. В предельном случае турбулентность во всех областях поля течения имеет количественно одну и ту же структуру; тогда турбулентность называют однородной. Турбулентность называется изотропной, если ее статистические характерные особенности не зависят от направления, так что имеет место совершенная неупорядоченность. Как мы увидим позже, в этом случае не может существовать среднего напряжения сдвига и, следовательно, градиента осредненной скорости. Эта осредненная скорость, если она существует, будет постоянна по всему полю течения.

Во всех других случаях, когда осредненная скорость имеет градиент, турбулентность будет неизотропной, или анизотропной. Поскольку градиент осредненной скорости связан с существованием среднего напряжения сдвига, то для обозначения этого класса течений часто используется выражение «турбулентность в потоке со сдвигом». Пристеночная турбулентность и анизотропная свободная турбулентность относятся именно к этому классу течений.

Для случая постоянного по всему полю течения среднего напряжения сдвига, например для плоского течения Куэтта, Карман [2] ввел понятие гомологичной турбулентности.

Довольно часто используется выражение «псевдотурбулентность», которое соответствует гипотетическому случаю потока с упорядоченной картиной течения, имеющей строго постоянную периодичность во времени и пространстве. Различие между псевдо- и реальной турбулентностью станет ясным, если сравнить картины течения в обоих случаях. Первая картина характеризуется регулярными линиями тока с постоянной периодичностью по всему полю, в то время как вторая может соответствовать этому условию только в некоторый момент времени, а в следующий момент картина течения может измениться как качественно, так и количественно. Поля псевдотурбулентного течения могут оказаться очень полезными для имитации реальных турбулентных полей, поскольку они легче поддаются теоретическому анализу; так, расчет диссипации кинетической энергии под действием вязкости в подобных полях оказывается относительно более простым. В своей книге «Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом» *) Таунсенд описывает несколько типов псевдотурбулентных течений, пригодных для изучения различных характеристик, типичных для реальных турбулентных потоков. С другой стороны, при использовании понятия псевдотурбулентности в теоретических исследованиях, посвященных анализу некоторых характерных особенностей реальной турбулентности, порой следует быть очень осторожным при интерпретации полученных результатов. Так, можно допустить серьезную

*) Таунсенд А., Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом, перев. с англ., ИЛ, Москва, 1959.

ошибку, если пытаться оценить расчетным путем явления переноса и диффузию, сопровождающие турбулентность, по заранее выбранной модели псевдотурбулентного течения, потому что эти процессы определяются, в основном (если не полностью), неупорядоченностью и хаотичностью реальных турбулентных движений.

Эта неупорядоченность и хаотичность турбулентности наглядно может быть продемонстрирована на следующем примере. Рассмотрим осциллограмму пульсаций скорости в некоторой точке потока. Если по этой осциллограмме находить число амплитуд, имеющих определенную величину, то в случае изотропной турбулентности получится гауссова кривая ошибок. Для турбулентного потока со сдвигом это распределение в общем случае будет более или менее асимметричным.

Как указывалось в связи с нашим определением турбулентности, в этом случае существуют средние значения величин по времени и пространству. Простое наблюдение турбулентных потоков и анализ осциллограмм различных параметров этих потоков показывают, что эти средние значения существуют по следующим причинам:

1. В некоторой данной точке турбулентной области более или менее регулярно по времени повторяется одна и та же четкая картина течения.

2. В некоторый данный момент времени одна и та же четкая картина течения повторяется более или менее регулярно в пространстве; следовательно, турбулентность имеет, вообще говоря, одинаковую всеобъемлющую структуру во всей рассматриваемой области.

Если сравнить различные турбулентные движения, в каждом из которых может быть фиксирована определенная картина течения, то будут наблюдаться различия, например, в размере этих картин течения. Это означает, что для количественного описания турбулентного движения необходимо ввести понятие масштаба турбулентности: определенный масштаб времени и определенный пространственный масштаб. Величины этих масштабов будут определяться размерами устройства, в котором имеется турбулентный поток, и скоростью движения жидкости внутри него. Например, для турбулентного потока в трубе масштаб времени следует, по-видимому, считать величиной порядка отношения диаметра трубы к скорости потока, а пространственный масштаб — величиной порядка диаметра трубы.

Очевидно, что характеризовать турбулентное движение лишь одним его масштабом недостаточно, поскольку это еще ничего не говорит об интенсивности движения. В качестве меры этой интенсивности нельзя взять среднюю величину скорости, поскольку интенсивность пульсаций по отношению к этой средней скорости — это как раз то, что хотят знать.

Если мгновенную величину скорости записать в виде

$$U = \bar{U} + u,$$

где черта сверху обозначает среднее значение и, следовательно, $\overline{u} = 0$, то среднее значение абсолютных величин пульсаций, т. е. $|\overline{u}|$, можно было бы взять в качестве меры этой интенсивности. Однако так делать не принято. По причинам, которые станут очевидными из последующего изложения, принято, как это предложили Драйден и Кьюз [36] в 1930 году, определять силу, или интенсивность, турбулентных пульсаций среднеквадратичной величиной

$$u' = \sqrt{\overline{u^2}}.$$

Тогда относительная интенсивность *) определится отношением

$$\frac{u'}{\overline{U}}.$$

Средние значения могут быть определены различными путями. Если турбулентное течение является квазистационарным, то можно пользоваться осреднением по времени. В случае потока с однородной турбулентностью можно ввести в рассмотрение осреднение по пространству. Однако если течение не является ни стационарным, ни однородным, то не всегда оказывается возможным произвести осреднение по времени или по пространству. В подобных случаях можно предположить, что среднее определяется из большого числа опытов, в которых сохраняются одинаковые начальные и граничные условия. Тогда речь идет о значениях, средних по множеству.

Если пользоваться эйлеровым методом описания течения, то к некоторой изменяющейся величине в произвольной точке потока может быть применен любой из трех перечисленных выше способов осреднения.

Если же мы хотим исследовать процессы турбулентного переноса или диффузии, то зачастую удобнее пользоваться лагранжевым описанием пути движения отдельных жидких частиц. В этом случае осреднение может быть произведено по большому числу частиц, которые характеризуются либо одинаковым начальным моментом времени, но различными исходными положениями (это требование накладывается на осреднение в однородном течении), либо одинаковым исходным положением, но различными начальными моментами времени (это требование накладывается на осреднение в квазистационарном течении). Кроме того, можно, конечно, рассматривать и средние по множеству значения.

Вообще говоря, процесс осреднения может быть произведен только в тех случаях, когда выполняются определенные условия.

*) Многие исследователи, в том числе Драйден и Кьюз [36], используют для только что определенной относительной интенсивности термины «интенсивность», или «степень турбулентности», либо «уровень турбулентности».

Чтобы ясно представить, о каких условиях идет речь, рассмотрим в качестве примера среднюю по времени величину скорости в некоторой точке течения. Эта средняя величина определяется следующим образом:

$$\bar{U} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} U dt.$$

Однако из практических соображений мы не можем выбрать период осреднения T бесконечно большим. В потоке могут иметься и очень медленные изменения, которые мы не причисляем к турбулентному движению этого потока. Возьмем, к примеру, случай, когда турбулентный поток в трубе имеет слабые пульсации низкой частоты, или случай, встречающийся в метеорологии, когда мы хотим провести различие между средней скоростью ветра за определенный период порядка одного дня и средней скоростью в течение более длительного периода.

Поэтому будем считать период времени T конечной величиной. Этот период должен быть достаточно большим по сравнению с временным масштабом турбулентности T_1 или, поскольку это соответствует определенной квазипериодичности, с главным периодом изменения картины течения. С другой стороны, он должен быть мал по сравнению с периодом T_2 любых медленных изменений течения, которые мы не причисляем к турбулентности. Ясно, что в выборе пульсаций, подлежащих анализу, имеется определенный произвол. К счастью, на практике этот выбор может быть сделан без особых затруднений. Если взять осциллограмму турбулентного потока, то на ней обычно очень легко выделить некоторый средний главный период изменения картины течения. Кроме того, полезно иметь в виду, что порядок величины главного периода соответствует размеру объекта, возбуждающего турбулентность, или аппарата, в котором исследуется турбулентный поток.

Считая период времени T конечной величиной, определим его среднее значение по формуле

$$\bar{U} = \frac{1}{T} \int_0^T U(t + \tau) d\tau$$

при условии $T_1 \ll T \ll T_2$.

Это среднее значение не должно зависеть от начального момента процесса осреднения, если $t < T_2$. Следовательно, производная $\partial \bar{U} / \partial t$ должна быть либо равна нулю, либо, при незначительном изменении основного течения, — пренебрежимо малой величиной.

Среднее значение обозначалось выше чертой сверху. Подобной чертой в этой книге обозначается любой процесс осреднения. При

изучении турбулентности нам часто придется производить осреднение не только отдельных величин, но и их произведений. В этом случае черта сверху имеет следующие свойства.

Пусть $A = \bar{A} + a$ и $B = \bar{B} + b$. При любом дальнейшем процессе осреднения величины $\bar{A}$ и $\bar{B}$ могут рассматриваться как постоянные. Следовательно,

$$\overline{\bar{A}} = \overline{\bar{A} + a} = \bar{A} + \bar{a} = \bar{A} + \bar{a}, \quad \text{откуда} \quad \bar{a} = 0; \quad \overline{\bar{A}\bar{B}} = \bar{A}\bar{B} = \overline{AB};$$

$$\overline{\bar{A}b} = \bar{A}\bar{b} = \bar{A}\bar{b} = 0, \quad \text{поскольку} \quad \bar{b} = 0.$$

Аналогично

$$\overline{\bar{B}a} = \bar{B}\bar{a} = \bar{B}\bar{a} = 0, \quad \text{поскольку} \quad \bar{a} = 0;$$

$$\overline{AB} = \overline{(\bar{A} + a)(\bar{B} + b)} = \overline{\bar{A}\bar{B}} + \overline{\bar{A}b} + \overline{\bar{B}a} + \overline{ab} = \bar{A}\bar{B} + \overline{ab}.$$

Мы уже говорили выше о понятиях пространственного и временного масштабов и соответствующей им квазипериодичности турбулентности. Анализ фотографий турбулентных потоков или осциллограмм пульсаций скорости показывает, что, собственно говоря, не может идти речи о какой-либо квазипериодичности или масштабе турбулентности. Можно говорить о средней максимальной квазипериодичности или о масштабе, определяемом главным образом размерами данного устройства. Но, помимо указанной, существует множество меньших квазипериодичностей и много других, которые еще меньше. Турбулентность состоит из большого числа наложенных друг на друга квазипериодических движений.

Обратной величиной масштаба или квазипериодичности является квазичастота. Следовательно, турбулентность характеризуется множеством квазичастот.

Характерные особенности турбулентности — хаотичность и неупорядоченность — включают в себя и прерывистость спектра различных частот, а также различных периодов и масштабов. По этой причине и была использована приставка «квази». Стало быть, если всегда иметь в виду этот прерывистый характер спектра, то для простоты приставку «квази» можно опустить.

Выше говорилось, что турбулентность представляет собой суперпозицию движений с уменьшающимся периодом, или — поскольку любая периодичность в распределении скорости связана с наличием градиентов скорости, соответствующих движению определенных вихрей, размер которых определяется этой периодичностью, — как мы теперь можем сказать, турбулентность представляет собой суперпозицию вихрей уменьшающегося размера. Но может ли этот размер уменьшаться неограниченно? Интуитивно ясно, что это не так. В реальных жидкостях, благодаря влиянию вязкости, этого

не происходит. Чем меньше вихрь, тем, вообще говоря, больше градиент скорости поперек вихря, а значит, больше и вязкие напряжения сдвига, которые противодействуют вихревому движению. Следовательно, в любом турбулентном потоке будет существовать статистический нижний предел размера наименьшего вихря; имеется также и минимальный масштаб турбулентности, который соответствует максимальной частоте турбулентного движения.

Все эти разноразмерные вихри, из которых складывается турбулентное движение, обладают определенной кинетической энергией, зависящей от их завихренности или от интенсивности пульсаций скорости на соответствующей частоте. Как только подходят к изучению более детальных особенностей турбулентности, сразу же возникает один интересный вопрос: как распределяется кинетическая энергия турбулентности по различным частотам? Хотя, как уже говорилось выше, в реальной турбулентности не наблюдается непрерывного спектра частот, все же оказывается возможным, в среднем, отнести определенное количество полной энергии к некоторому точному значению частоты. Такое распределение энергии по частотам обычно называется энергетическим спектром. Этот спектр может быть установлен с помощью соответствующей измерительной аппаратуры. Даже если представляется возможным произвести гармонический анализ пульсаций скорости, то это ни в коей мере не доказывает, что и, наоборот, турбулентные пульсации складываются из этих гармоник. Интересно провести сравнение с подобной проблемой в случае звуковых колебаний, когда можно различить шум (турбулентный) и ноту (составленную из некоторого числа гармоник). Бюргерс [3] обратил внимание на аналогичную дилемму в случае света, давно известную из теоретической оптики, а именно: можно ли утверждать, что цвета спектра присутствуют первоначально в белом свете, или они образованы спектроскопом?

Выше мы говорили о том, что турбулентное движение можно считать суперпозицией вихрей с различными размерами и завихренностью, имеющими определенный верхний и нижний пределы. Верхний предел размера вихрей определяется главным образом размером самого устройства, по которому движется жидкость, в то время как нижний предел определяется влиянием вязкости и при прочих равных условиях уменьшается с возрастанием скорости осредненного потока. Внутри этих наименьших вихрей течение больше не является турбулентным, а становится вязким, и доминирующая роль в нем принадлежит молекулярным эффектам. Здесь может возникнуть вопрос: не могут ли эти наименьшие вихри стать настолько малыми, что течение внутри них уже нельзя будет рассматривать как непрерывное? Другими словами, каков размер этих наименьших вихрей по сравнению со средней длиной свободного пробега молекул? Следующие цифры, возможно, помогут понять смысл этого вопроса.

Для умеренных скоростей потока, не превышающих, скажем, 100 м/сек , наименьший пространственный масштаб, или размер вихря, вряд ли будет меньше приблизительно 1 мм ; эта величина еще очень велика по сравнению со средней длиной свободного пробега молекул, которая имеет порядок 10^{-4} мм . Один кубический миллиметр воздуха при атмосферных условиях содержит, грубо говоря, $2,7 \cdot 10^{16}$ молекул. Следовательно, газы в атмосферных условиях, а также, конечно, и жидкости при исследовании турбулентных течений с умеренными скоростями могут рассматриваться как сплошная среда.

Приемлемые значения турбулентных пульсаций составляют приблизительно 10% от средней скорости и лежат в пределах, скажем, от 1 до 1000 см/сек . Эти значения следует сравнить со средней скоростью молекул, которая в случае воздуха имеет порядок $50\,000 \text{ см/сек}$. Если частота турбулентности изменяется, скажем, от 1 до $10\,000 \text{ сек}^{-1}$, то частота столкновений молекул в случае воздуха составляет около $5 \cdot 10^9 \text{ сек}^{-1}$.

Как видим, диапазон величин, характеризующих турбулентность, лежит достаточно далеко от диапазона соответствующих молекулярных величин.

Первое знакомство с турбулентностью мы закончим анализом нескольких фотографий движения жидкости, который поможет более наглядно представить специфические особенности турбулентного течения.

На рис. 1.1 показана картина течения непосредственно позади круглого цилиндра при малом значении числа Рейнольдса [4]. Общая картина течения настолько упорядочена, что вряд ли подходит под определение реальной турбулентности, которая характеризуется хаотичностью движения. Это течение может рассматриваться, самое большее, только как псевдотурбулентное.



Рис. 1.1. Картина течения вниз по потоку за цилиндром.

На рис. 1.2 изображена подобная картина течения, но соответствующая более высокому значению числа Рейнольдса [5]. Вплоть до расстояний вниз по потоку, составляющих от 30 до 40 диаметров цилиндра, общая картина течения все еще достаточно упорядочена; более четкие линии тока — а вне этих расстояний также и линии тока основного течения — постепенно становятся все более и более турбулентными. Четкие линии тока турбулизируются по мере того, как число Рейнольдса возрастает. Это ясно видно из рассмотрения

рис. 1.3, который показывает картину течения непосредственно позади цилиндра при сильном увеличении [4]. Внутри зоны крупных упорядоченных вихрей картина течения — вполне турбулентная, причем

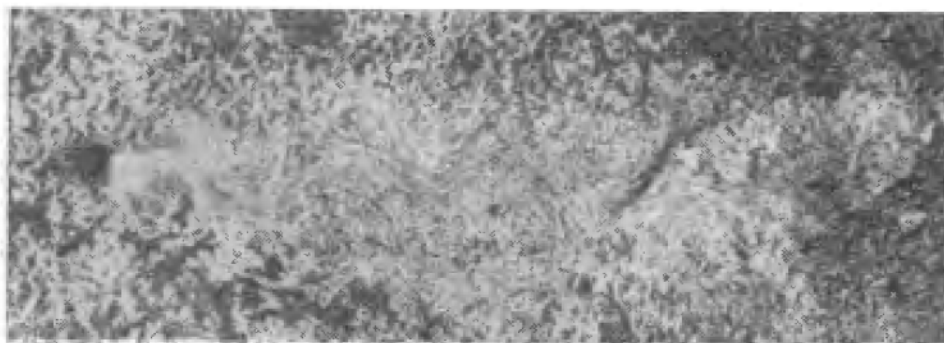


Рис. 1.2. Картина течения вниз по потоку за цилиндром.

пространственный масштаб намного меньше масштаба крупных упорядоченных вихрей.

Упорядоченность и неупорядоченность течения в следе за цилиндром хорошо иллюстрируется осциллограммами скорости, снятыми

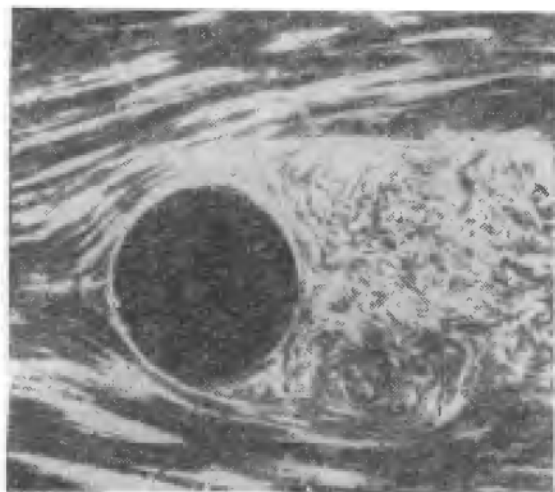


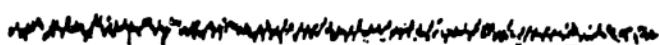
Рис. 1.3. Картина течения вблизи цилиндра. Большое число Рейнольдса.

в различных точках следа. На рис. 1.4 подобные осциллограммы изображены вместе с осциллограммой для турбулентного потока в аэродинамической трубе. Осциллограмма, снятая в точке, которая лежит на линии, проходящей через центры вихрей каждого ряда (т. е. в точке, эксцентричной относительно оси следа), характеризуется одной определенной частотой, равной удвоенной предшествующей частоте (в этом проявляется влияние вихрей, которые попеременно отделяются от каждой из кромок цилиндра). Если сравнить эти осциллограммы с той, которая получена для реального турбулентного течения

в аэродинамической трубе, то разница между ними сразу станет ясной.

На рис. 1.5, *a—e* показана серия картин течения, соответствующих различным, постепенно возрастающим расстояниям вниз по потоку от решетки (с шагом $M = 4,5$ см и диаметром стержней $d = 1,5$ см), которая протаскивается со скоростью $6,65$ см/сек по покоящейся

жидкости. В то время как на рис. 1.5, *a* видны четкие и упорядоченные линии тока, последующие картины течения становятся все менее и менее четкими. На рис. 1.5, *г* — *е*, помимо постепенной турбулизации течения, заметно еще и затухание вихрей: контуры их становятся менее резкими.



Турбулентность в аэродинамической трубе $\sqrt{\frac{u^2}{U}} = 0,0085$.

Время $\approx 0,4$ сек. Относительное увеличение = 6,4



Ось следа $2\frac{1}{2}$ " вниз по потоку от цилиндра с диаметром $1\frac{3}{16}$ ". Относительное увеличение = 1.

Время $\approx 0,3$ сек



На расстоянии $1\frac{3}{32}$ " от оси следа $2\frac{1}{2}$ " вниз по потоку от цилиндра с диаметром $1\frac{3}{16}$ ".

Относительное увеличение = 1. Время $\approx 0,3$ сек



На расстоянии $1\frac{1}{2}$ " от оси следа $2\frac{1}{2}$ " вниз по потоку от цилиндра с диаметром $1\frac{3}{16}$ ".

Относительное увеличение = 8. Время $\approx 0,3$ сек

Скорость воздуха ≈ 60 фт/сек

Рис. 1.4. Осциллограммы турбулентности в аэродинамической трубе и в следе за цилиндром [6].

Рассмотренные фотографии показывают, каким образом возбуждается турбулентность при течении жидкости относительно твердого тела. Возбуждение и развитие турбулентности при спутном движении соприкасающихся потоков одной и той же жидкости иллюстрируется на следующих фотографиях.

На рис. 1.6 изображены начальные вихри, образованные на границе свободной струи (граница полуструи). По ходу развития этих вихрей вниз по потоку наблюдается постепенный переход к неупорядоченному турбулентному течению. Рис. 1.7 иллюстрирует турбулентный характер течения в свободной струе, в приграничной зоне которой все еще различимы отдельные вихреобразования.

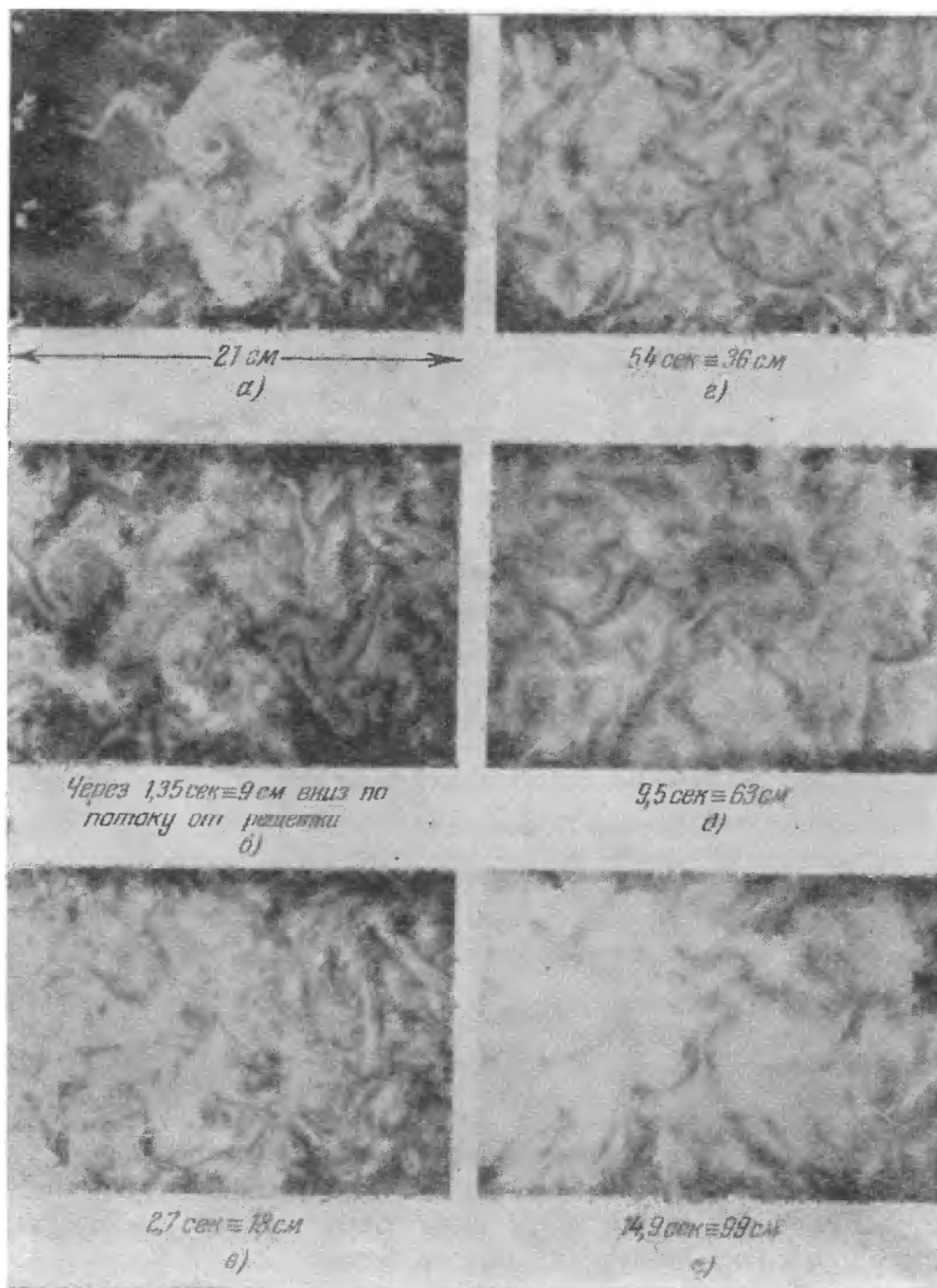


Рис. 1.5. Картина течения за решеткой. $\bar{U} = 6,65$ см/сек, $M = 4,5$ см, $d = 1,5$ см [7].



Рис. 1.6. Вихри на границе полуструи [8].



Рис. 1.7. Картина течения в свободной струе.

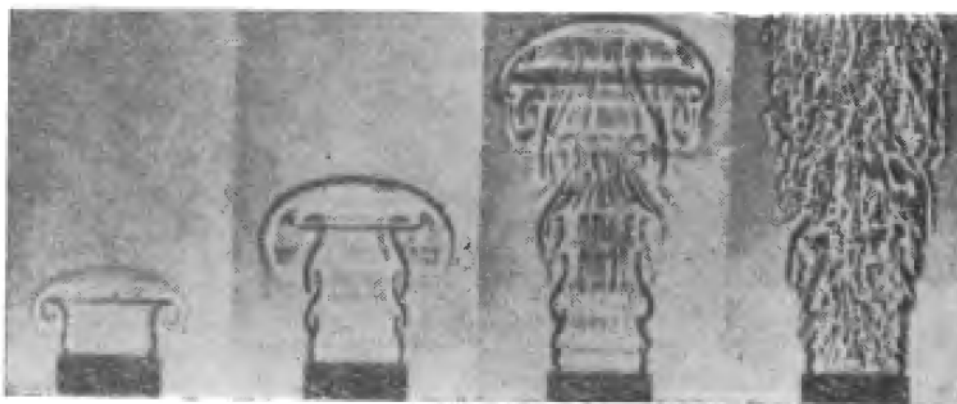


Рис. 1.8. «Шлирен»-фотографии свободной струи [9].

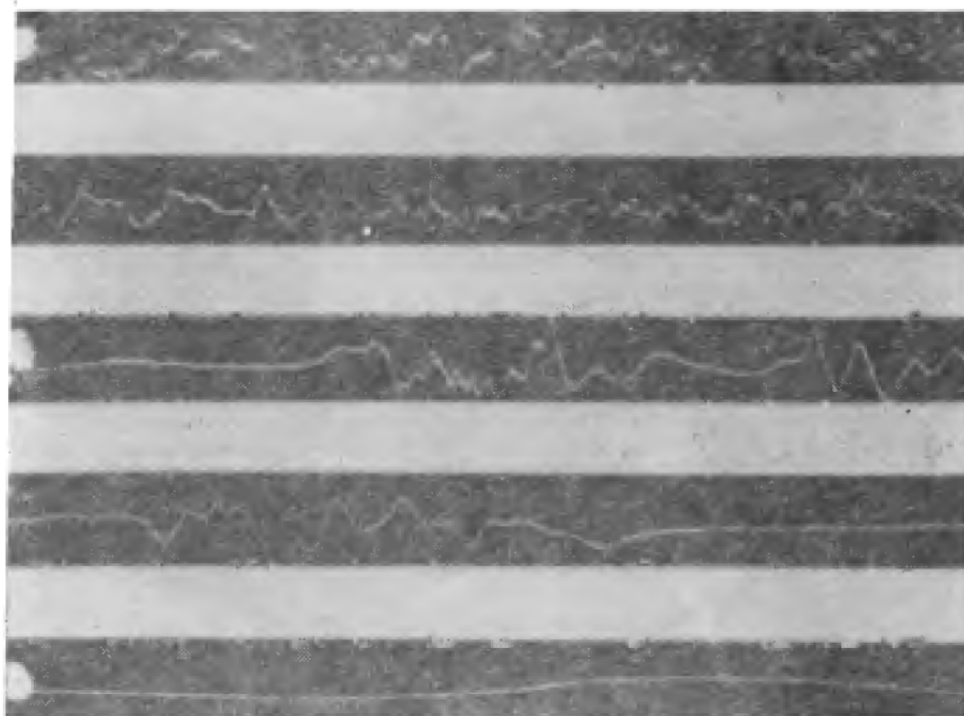


Рис. 1.9. Осциллограммы пульсаций в различных сечениях свободной струи [10].

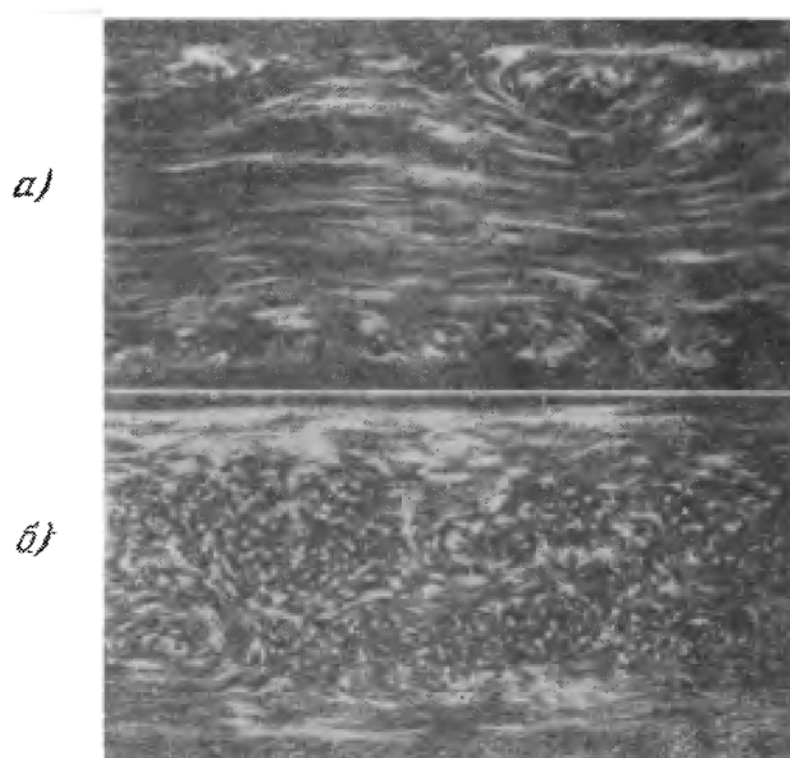


Рис. 1.10. Картина течения в канале [4].

На рис. 1.8 показаны «шлирен»-фотографии струи непосредственно в момент ее истечения [9]. На первых стадиях заметны четкие отдельные вихри, а на последующих — полностью развитое турбулентное течение.

Как следует из рассмотрения рис. 1.7, течение в центральной зоне струи отличается от течения в приграничной зоне, где оно уже не является непрерывным, а по направлению к краю струи становится все более перемежающимся. Отмеченное различие в характере течения, конечно, отражается на осциллограммах, снятых в различных точках струи (рис. 1.9). Это различие будет подробно рассмотрено в главе 6. Здесь же достаточно будет упомянуть, что эта перемежаемость, которая типична для свободной турбулентности, указывает на наличие крупномасштабных вихрей.

Наконец, на рис. 1.10, *а* и *б* изображено течение в канале, сфотографированное с помощью движущейся камеры [4]. С точки зрения более точного определения масштаба турбулентности, которое будет дано ниже, важно отметить, что внутри области, простирающейся от оси канала и, приблизительно, до половины расстояния между осью и стенкой, по-видимому, существует корреляция (связь) между скоростями (это особенно четко видно на рис. 1.10, *б*).

§ 1.2. Уравнения движения турбулентного потока; рейнольдсовы напряжения

Примем здесь, что жидкость является ньютоновской, а ее течение представляет собой решение уравнения неразрывности и уравнений движения Навье — Стокса, удовлетворяющее заданным начальным и граничным условиям. Турбулентные течения образуют специальный класс таких решений, для которых зависимые переменные, например скорость, давление и плотность, не являются однозначными функциями пространственных координат и времени, а должны описываться законами вероятности (хаотичность движения).

Уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \rho U_i = 0. \quad (1.1)$$

В турбулентном потоке это уравнение должно удовлетворяться не только в любой момент времени, но и в среднем. Какой вид примет это уравнение для средних значений $\bar{\rho}$ и $\bar{U}_i$? Для этого запишем

$$\rho = \bar{\rho} + \tilde{\rho} \quad \text{и} \quad U_i = \bar{U}_i + u_i.$$

Подставим эти выражения в уравнение (1.1) и выполним операцию осреднения:

$$\frac{\partial (\bar{\rho} + \tilde{\rho})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} + \tilde{\rho})(\bar{U}_i + u_i) = 0.$$

Используя перечисленные в § 1.1 свойства осреднения, получаем

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \bar{U}_i + \widetilde{\rho u_i}) = 0. \quad (1.2)$$

Отсюда следует, что уравнение типа (1.1) нельзя применять просто к средним величинам $\bar{\rho}$ и $\bar{U}_i$ и что если между пульсациями плотности и скоростью существует корреляция (связь), то в уравнении появляется дополнительный член.

Как показал впервые Осборн Рейнольдс, уравнения движения для средних величин в турбулентном потоке могут быть аналогичным способом выведены из уравнений Навье — Стокса, записанных для мгновенных значений параметров потока. Но прежде чем перейти к этому, целесообразно, по-видимому, дать сначала краткий вывод этих уравнений, чтобы напомнить смысл отдельных членов, входящих в них.

Эти уравнения фактически представляют собой не что иное, как уравнения сохранения импульса. Рассмотрим, например, равновесие

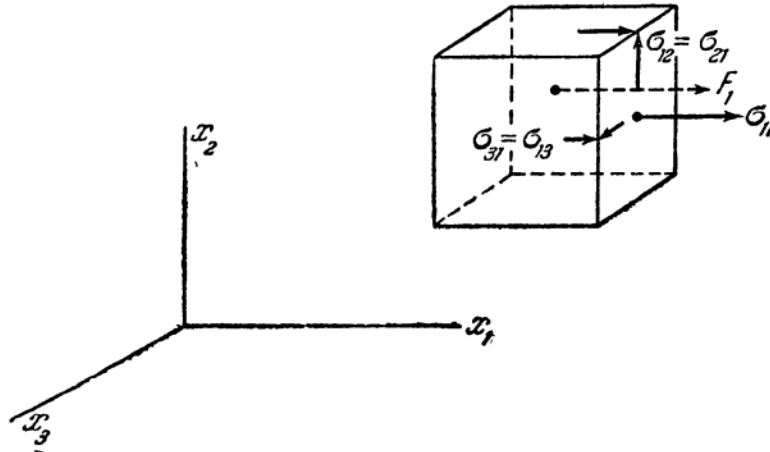


Рис. 1.11. Напряжения, действующие на элементарный куб жидкости.

некоторого куба жидкости в направлении оси x_1 . На выделенный элемент жидкости действуют следующие поверхностные силы (см. рис. 1.11):

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \sigma_{11} dx_1 dx_2 dx_3; \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \sigma_{21} dx_2 dx_1 dx_3; \quad \frac{\partial}{\partial x_3} \sigma_{31} dx_3 dx_1 dx_2.$$

Здесь σ_{ij} — напряжение, действующее на элемент поверхности, перпендикулярный к i -му направлению, в направлении j ; эта величина положительна, если она направлена в сторону положительного направления j .

Пусть F_1 — внешняя сила, совершающая работу над единичным объемом жидкости; тогда, применяя к этому единичному объему

второй закон Ньютона, получаем

$$\rho \frac{dU_1}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_1} \sigma_{11} + \frac{\partial}{\partial x_2} \sigma_{21} + \frac{\partial}{\partial x_3} \sigma_{31} + F_1.$$

Подобные уравнения получаются соответственно и для равновесия в направлениях x_2 и x_3 .

Используя тензорные обозначения в декартовых координатах, перепишем эти уравнения в более компактной форме:

$$\rho \frac{dU_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ji} + F_i. \quad (1.3)$$

Девять компонент напряжения σ_{ji} образуют тензор второго ранга. Этот тензор напряжений можно разбить на две части: одну, которая соответствует средней величине напряжения для всех направлений, т. е. гидростатическому давлению P , и другую, для которой напряжения определяются другими факторами.

Средняя величина гидростатического давления должна быть инвариантна относительно поворота осей координат; эта средняя величина записывается в виде

$$-P = \frac{1}{3} \sigma_{ii}. \quad (1.4)$$

Мы не будем давать здесь вывода этого результата; читатель сможет найти его в любом учебнике по теории упругости. Более того, аналогичный вопрос, а именно распределение турбулентных напряжений, будет более подробно рассмотрен в § 1.4.

Если указанным выше способом разбить тензор напряжений σ_{ji} на симметричную часть, которая содержит гидростатическое давление P , и дополнительную часть, то он запишется в виде

$$\sigma_{ji} = \underbrace{-P \delta_{ji}}_{\text{симметричная часть}} + (\sigma_{ji} + P \delta_{ji}),$$

где δ_{ji} — символ Кронекера, или единичный тензор второго ранга.

Напряжения σ_{ji} обуславливают деформации элементов жидкости. Поскольку эти деформации определяются частными производными $\partial U_i / \partial x_j$ от скоростей U_i , то оказывается возможным установить связь напряжений σ_{ji} с этими частными производными.

Частные производные $\partial U_i / \partial x_j$ тоже образуют тензор второго ранга, который может быть разделен на симметричную и антисимметричную части:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} U_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} D_{ij} + \frac{1}{2} \Omega_k \epsilon_{ijk},$$

где ϵ_{ijk} — антисимметричный единичный тензор третьего ранга.

Симметричная часть D_{ij} определяет деформацию жидкости и называется тензором скоростей деформации. Антисимметричная часть $\Omega_k \epsilon_{ijk}$ определяет вращение жидкости без деформации; она характеризует завихренность движения. Величина Ω_k называется вектором антисимметричного тензора. Она однозначно связана с завихренностью, причем эта связь имеет вид

$$\Omega_k = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \epsilon_{ijk}.$$

Как указывалось, напряжения вызывают деформацию элементов жидкости. Отсюда логично предположить, что между тензором напряжений и тензором скоростей деформации существует определенная связь. В случае ньютонианской жидкости эта связь считается линейной:

$$\sigma_{ji} = \mu D_{ji} \quad \text{при } j \neq i, \quad (1.5)$$

где величина μ определяется как динамический коэффициент вязкости жидкости.

В случае $j = i$ появляется добавка от гидростатического давления, которое вызывает либо сжатие, либо расширение жидкого элемента. Таким образом,

$$\sigma_{ji} + P\delta_{ji} = \mu D_{ji} + \mu_1 \Theta \quad \text{при } j = i, \quad (1.6)$$

где величина $\Theta = \frac{1}{2} D_{kk} = \partial U_k / \partial x_k$ обозначает дилатацию, которая представляет собой величину, обратную сжимаемости.

Уравнения (1.5) и (1.6) могут быть записаны в виде одного уравнения:

$$\sigma_{ji} + P\delta_{ji} = \mu D_{ji} + \mu_1 \Theta \delta_{ji}. \quad (1.7)$$

Чтобы определить величину μ_1 , применим к уравнению (1.7) операцию свертывания:

$$\sigma_{ii} + P\delta_{ii} = \mu D_{ii} + \mu_1 \Theta \delta_{ii}.$$

или

$$\sigma_{ii} + 3P = \mu D_{ii} + 3\mu_1 \Theta,$$

или, поскольку $D_{ii} = 2\Theta$,

$$0 = (2\mu + 3\mu_1) \Theta,$$

откуда *)

$$\mu_1 = -\frac{2}{3} \mu.$$

*) В последнее время справедливость этого соотношения была подвергнута сомнению [13]. В выражение (1.7) величины P , μ и μ_1 вводятся без определения P . Величины μ и μ_1 называются соответственно первым и вторым коэффициентами вязкости. Только в том случае, если полагать спра-

Следовательно,

$$\sigma_{ji} = -P\delta_{ji} + \mu \left(D_{ji} - \frac{2}{3} \Theta \delta_{ji} \right). \quad (1.8)$$

Подстановка этого соотношения для σ_{ji} в уравнение (1.3) дает

$$\rho \frac{dU_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-P\delta_{ji} + \mu D_{ji} - \frac{2}{3} \mu \Theta \delta_{ji} \right) + F_i,$$

или

$$\rho \frac{dU_i}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \mu D_{ji} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \mu \Theta + F_i. \quad (1.9)$$

Это — общее выражение для уравнений Навье — Стокса в случае сжимаемой жидкости, причем коэффициент вязкости μ считается здесь функцией пространственных координат.

Уравнение (1.9) может быть записано и в другой форме. Из уравнения неразрывности (1.1) следует

$$\Theta = \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}.$$

Для изэнтропического процесса

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\kappa P} \frac{dP}{dt} = \frac{1}{\rho c^2} \frac{dP}{dt},$$

где $\kappa = c_p/c_v$ и c — скорость звука. Следовательно,

$$\Theta = -\frac{1}{\rho c^2} \frac{dP}{dt}, \quad (1.10)$$

и тогда уравнение (1.9) записывается в виде

$$\rho \frac{dU_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \mu D_{ji} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(P + \frac{2}{3} \frac{\mu}{\rho c^2} \frac{dP}{dt} \right) + F_i. \quad (1.11)$$

Особый интерес представляют следующие два случая:

1. *Постоянный коэффициент вязкости:* $\mu = \text{const.}$ В этом случае имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} (\mu D_{ji}) &= \mu \frac{\partial}{\partial x_j} D_{ji} = \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) = \\ &= \mu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} U_i + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} = \mu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} U_i + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \Theta, \end{aligned}$$

ведливым уравнение (1.4), из него можно получить $\mu_1 = -2/3 \mu$. Этот результат получен также и в кинетической теории газов. По-видимому, его следует считать экспериментально подтвержденным опытами по поглощению звука только для совершенных одноатомных газов. Однако аналогичные опыты в случае жидкостей дали для отношения коэффициентов вязкости величину значительно большую, чем $2/3$.

так что уравнение (1.9) принимает вид

$$\rho \frac{dU_i}{dt} = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} U_i + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} + F_i, \quad (1.12)$$

а уравнение (1.11)

$$\rho \frac{dU_i}{dt} = \mu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} U_i - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(P + \frac{1}{3} \frac{\mu}{\rho c^2} \frac{dP}{dt} \right) + F_i. \quad (1.13)$$

2. Несжимаемая жидкость: $\rho = \text{const}$, $\Theta = 0$.

$$\rho \frac{dU_i}{dt} = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \mu D_{ji} + F_i \quad (1.14)$$

или, поскольку

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \mu D_{ji} &= \mu \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 U_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \mu}{\partial x_j} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \frac{\partial \mu}{\partial x_j}, \end{aligned}$$

то

$$\rho \frac{dU_i}{dt} = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \frac{\partial \mu}{\partial x_j} + F_i. \quad (1.15)$$

Полученные выше уравнения применимы как к нетурбулентному, так и к турбулентному потокам. Чтобы более наглядно представить себе турбулентное движение и его взаимодействие с осредненным движением, воспользуемся методом Осборна Рейнольдса применительно к уравнению (1.2) для течения сжимаемой жидкости с постоянной вязкостью.

Положим

$$U_i = \bar{U}_i + u_i, \quad \rho = \bar{\rho} + \tilde{\rho}, \quad P = \bar{P} + p,$$

где $\bar{A} = \frac{1}{T} \int_0^T A(t + \tau) d\tau$, причем время T — велико по сравнению

с масштабом времени турбулентного движения.

Подстановка этих выражений в уравнение (1.12) и осреднение по времени дает искомые уравнения для турбулентного потока. При выполнении операции осреднения следует пользоваться его свойствами, указанными в § 1.1. Кроме того, следует иметь в виду, что

$$\frac{dU_i}{dt} = \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j}.$$

Тогда левая часть уравнения (1.12) примет вид

$$\begin{aligned} \overline{\rho \frac{dU_i}{dt}} &= \bar{\rho} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{\rho} \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \overline{\rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} + \overline{\tilde{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial t}} + \\ &+ \overline{\tilde{\rho} u_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j}} + \bar{U}_j \overline{\tilde{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} + \overline{\tilde{\rho} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}, \end{aligned}$$

а правая часть запишется в форме

$$-\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \bar{U}_i + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial x_i} + \bar{F}_i.$$

Следовательно, уравнение (1.12) преобразуется так:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \right) = & -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{1}{3} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial x_i} \right) + \bar{F}_i - \\ & - \overline{\rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} - \bar{\rho} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} - \bar{\rho} u_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} - \bar{U}_j \bar{\rho} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \bar{\rho} u_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Таким образом, видно, что помимо хорошо известных членов, соответствующих осредненному движению, в правой части уравнения появляются дополнительные члены, связанные с турбулентным движением; четыре из них определяются двойными и даже тройными корреляциями между пульсациями плотности и скорости и один — двойной корреляцией $\overline{u_i u_j}$.

Применяя уравнение неразрывности (1.1), можно преобразовать турбулентные члены в правой части уравнения (1.16) следующим образом:

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\rho u_i u_j} + \frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho u_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\rho u_j} \bar{U}_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\rho u_i} \bar{U}_j + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\rho u_i u_j} \right).$$

Следовательно, влияние турбулентности определяется фактически тремя корреляциями: $\overline{u_i u_j}$, $\overline{\rho u_i}$ и $\overline{\rho u_i u_j}$.

В большинстве исследованных случаев турбулентного движения влиянием сжимаемости можно пренебречь, т. е. считать жидкость несжимаемой.

Влиянием сжимаемости при турбулентных движениях можно пренебречь, если $\bar{\rho}/\rho \ll 1$. При таких малых значениях $\bar{\rho}/\rho$ существует приближенное равенство

$$\frac{\bar{\rho}}{\rho} \approx \frac{p}{\rho c^2}.$$

Поскольку величина p имеет порядок $\bar{\rho} u^2$, то, следовательно, $\bar{\rho}/\rho$ имеет порядок u^2/c^2 , т. е. квадрата числа Маха турбулентности.

В этом случае уравнение (1.16) значительно упрощается, так как четырем из пяти турбулентных членов можно пренебречь.

Таким образом, для несжимаемой жидкости с постоянным коэффициентом вязкости уравнение (1.16) сводится к следующему выражению:

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \bar{U}_i - \overline{\rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} + \bar{F}_i.$$

Это уравнение можно записать в другой форме, которая более наглядно показывает физический смысл турбулентных членов правой части.

Полагая жидкость несжимаемой, имеем

$$\overline{U_i \frac{\partial U_j}{\partial x_j}} = \overline{U_i} \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_j} + \overline{u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j}} = \overline{u_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0.$$

Если к правой части уравнения движения прибавить величину $-\overline{u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j}} = 0$, то оно примет вид

$$\rho \left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial t} + \overline{U_j} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} - \rho \overline{u_i u_j} \right) + \overline{F_i}. \quad (1.17)$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (1.3), приходим к заключению, что турбулентные члены $\rho \overline{u_i u_j}$ можно интерпретировать как напряжения, действующие на элемент жидкости дополнительно к напряжениям, определяемым давлением P , и вязким напряжениям.

С учетом этих турбулентных напряжений полные компоненты напряжений запишутся так:

$$\sigma_{ij} = -\overline{P} \delta_{ij} + \mu \overline{D_{ij}} - \rho \overline{u_i u_j}. \quad (1.18)$$

Поскольку уравнение движения для турбулентного потока в форме (1.17) впервые было дано Рейнольдсом, турбулентные напряжения $\rho \overline{u_i u_j}$ часто называют рейнольдсовыми напряжениями.

Рейнольдсовы напряжения имеют как нормальные, так и тангенциальные компоненты. Нормальные компоненты $\rho \overline{u_n^2}$ получаются, если положить $i=j$. Покажем, что эта величина действительно может рассматриваться как нормальное напряжение.

Рассмотрим элемент поверхности dS , перпендикулярный, скажем, к направлению x_1 . Будем рассматривать далее только турбулентное движение жидкости через этот элемент, т. е. будем считать, что осредненное движение со скоростью $\overline{U_1}$ отсутствует. Тогда величина $\rho \overline{u_1^2} dS$ означает только осредненный поток импульса через этот элемент поверхности, а именно $\overline{(\rho u_1) u_1} dS$. Поскольку этот поток импульса оказывает некоторую реакцию (в данном случае — давление) на поверхность dS , то член $\rho \overline{u_1^2}$ в выражении для положительного напряжения σ_{11} имеет отрицательный знак.

Аналогичным способом можно показать, что члены $-\rho \overline{u_i u_j}$ при $i \neq j$ могут рассматриваться как тангенциальные (касательные) напряжения. Рассмотрим, например, величину $-\rho \overline{u_1 u_2}$. Возьмем теперь элемент поверхности dS , перпендикулярный к направлению x_2 .

Жидкие элементы, проходящие через эту площадку, имеют обе компоненты скорости u_1 и u_2 . Если в среднем большинство частиц с положительным значением u_2 обладает также и положительным значением u_1 и наоборот, то в среднем величина $\overline{u_1 u_2}$ тоже должна быть положительна. В этом случае сила в положительном направлении x_1 воздействует на жидкость вдоль той стороны площадки dS , которая обращена в сторону положительного направления x_2 , и, наоборот, сила в отрицательном направлении x_1 приложена к жидкости со стороны площадки dS , обращенной в сторону отрицательного направления x_2 . Следовательно, $\sigma_{21} = -\rho \overline{u_1 u_2}$.

Из сравнения турбулентных напряжений в уравнениях движения с соответствующими напряжениями, вызванными влиянием вязкости, напрашивается предположение, что турбулентные напряжения действуют подобно вязким напряжениям, т. е. что они прямо пропорциональны градиенту скорости. Это предположение выдвинул Буссинеск [11], который ввел понятие о «кажущейся», «турбулентной» или «вихревой» вязкости ϵ_m , такой, что напряжения σ_{ij} записываются в виде

$$\sigma_{ij} = -\bar{P}\delta_{ij} + (\mu + \rho\epsilon_m)\bar{D}_{ij}. \quad (1.19)$$

Если это выражение сравнить с соответствующим соотношением (1.18), то получим следующее равенство:

$$-\overline{u_i u_j} = \epsilon_m \bar{D}_{ij} = \epsilon_m \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.20)$$

Согласно концепции Буссинеска, коэффициент вихревой вязкости ϵ_m является скалярной величиной. Первоначально Буссинеск ввел предположение лишь о постоянстве ее по направлению, однако в приложении этой теории к анализу турбулентных течений в канале он предположил еще, что коэффициент ϵ_m постоянен также и по величине. Следует ожидать, что подобное постоянство этой величины может наблюдаться лишь в том случае, если поле турбулентного течения, по меньшей мере, однородно. Хотя, как мы увидим ниже (см. главу 6), в нескольких случаях свободного турбулентного течения, которое не является однородным и отличается значительным градиентом скорости, а значит и напряжением сдвига, только в одном направлении, и оказывается возможным удовлетворительно описать суммарное поле течения, полагая коэффициент вихревой вязкости постоянным, все же, как правило, эту величину нельзя считать постоянной. Так, при турбулентном течении вблизи стенки с поперечным сдвигом коэффициент вихревой вязкости в пограничном слое не является постоянной величиной.

Более того, если бы величина ϵ_m была постоянным скаляром, то общее соотношение типа уравнения (1.20) было бы несправедливо,

ибо если над этим соотношением произвести операцию свертывания, то получается

$$-\overline{u_i u_i} = 2 \times \text{кинетическая энергия на единицу массы} = 2\epsilon_m \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_i}.$$

Для несжимаемой жидкости правая часть этого соотношения при конечных значениях ϵ_m обращается в нуль, но левая часть может обращаться в нуль только в том случае, если турбулентность вообще отсутствует.

Если мы все же хотим придерживаться предположения о скалярной вихревой вязкости, то более правильным будет выделить из турбулентных напряжений среднее турбулентное давление в виде самостоятельного члена (см. § 1.4):

$$\bar{P}_t = \rho \underbrace{\langle \bar{u}_n^2 \rangle}_{\substack{\text{среднее} \\ \text{по} \\ \text{всем } n}} = \frac{1}{3} \rho \overline{u_i u_i}.$$

Тогда вместо соотношений (1.19) и (1.20) следует рассматривать равенства

$$\bar{\sigma}_{ij} = -(\bar{P} + \bar{P}_t) \delta_{ij} + (\mu + \rho \epsilon_m^*) \bar{D}_{ij}$$

и

$$-\overline{u_i u_j} + \frac{1}{3} \overline{u_k u_k} \delta_{ij} = \epsilon_m^* D_{ij}.$$

В таком случае операция свертывания, примененная к последнему соотношению, обращает обе части уравнения для несжимаемой жидкости в тождественный нуль.

Некоторые исследователи, чтобы учесть неодинаковость значений ϵ_m в различных направлениях (см., например, [12]), предлагали считать ϵ_m векторной величиной. Однако подобное предположение исключает соотношение между турбулентными напряжениями $\overline{u_i u_j}$ и тензором скоростей деформаций $\bar{D}_{ij}$ типа (1.20).

Вследствие того, что

$$\delta_{kj} (\epsilon_m)_k \bar{D}_{ij} = A_i,$$

скалярное произведение тензора второго ранга (каким является D_{ij}) и вектора или тензора первого ранга [такого, как $(\epsilon_m)_k$] снова дало бы вектор, а не тензор второго ранга (каким является $\overline{u_i u_j}$). Тензор второго ранга может быть образован из другого тензора второго ранга только в том случае, если последний скалярно умножается на тензор второго или нулевого ранга, т. е. на скалярную величину (см. приложение).

Пусть $(\epsilon_m)_{il}$ — тензор второго ранга, тогда

$$\delta_{lk} (\epsilon_m)_{il} \bar{D}_{jk} = (\epsilon_m)_{ik} \bar{D}_{jk} = -\overline{u_i u_j},$$

где каждый член $-\overline{u_i u_j}$ должен быть равен сумме трех членов $(\epsilon_m)_{ik} \bar{D}_{jk}$.

В новейших теориях атмосферной турбулентности, подобных разработанной Эртелем [37], вихревая вязкость считается переменной, однако, что более правильно, описываемой тензором второго ранга *).

Понятие вихревой вязкости может вызвать возражение, если оно используется по аналогии с «молекулярной» вязкостью жидкости. Дело в том, что молекулярная вязкость — реальное свойство жидкости, проявляющееся даже в том случае, когда жидкость покоится, тогда как вихревая вязкость может проявляться, лишь если имеется какое-то течение жидкости, и, ясно, не является свойством жидкости, как таковой. Однако формальное введение понятия «вихревой вязкости» не встречает никаких возражений, если мы отдаем себе полный отчет о его специфике, а именно, что оно выражает турбулентные напряжения через градиенты средней скорости в движущейся жидкости.

Цилиндрические координаты. Поскольку в этой книге нам придется иметь дело с задачами об осесимметричных течениях, которые наиболее целесообразно описывать в цилиндрических координатах, то для удобства мы приведем здесь уравнения неразрывности и движения в цилиндрических координатах. Эти уравнения могут быть выведены способом, аналогичным использованному в предыдущих параграфах для случая декартовых координат.

Пусть U_r , U_φ и U_z — компоненты скорости в направлениях трех цилиндрических координат r , φ и z .

Тогда уравнение неразрывности записывается в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (\rho U_r) + \rho \frac{U_r}{r} + \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho U_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho U_z) = 0$$

или

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \Theta = 0, \quad (1.21)$$

*) При этом все же остается неразрешенным противоречие, состоящее в том, что компоненты тензора вихревой диффузии $(\epsilon_m)_{ik}$ подчинены определенным условиям, так как $\overline{u_i u_j}$ и D_{ij} симметричны относительно i и j , в то время как для несжимаемой жидкости $D_{ii} = 0$. Следствия, вытекающие из этих ограничений для тензора диффузии $(\epsilon_m)_{ik}$, и их смысл остаются все еще не полностью выясненными.

Единственным путем, позволяющим избежать всех этих трудностей, представляется введение коэффициента вихревой диффузии в виде тензора четвертого ранга, хотя это и существенно усложняет дело.

где

$$\Theta = \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} + \frac{\partial U_\varphi}{r \partial \varphi} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \quad (1.22)$$

и

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{U_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + U_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Уравнения движения в проекциях на три указанных координатных направления в предположении о постоянстве коэффициента вязкости запишутся так:

$$\rho \left(\frac{dU_r}{dt} - \frac{U_\varphi^2}{r} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \mu \left(\nabla^2 U_r - \frac{U_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} \right) + F_r, \quad (1.23a)$$

$$\rho \left(\frac{dU_\varphi}{dt} + \frac{U_r U_\varphi}{r} \right) = -\frac{\partial P}{r \partial \varphi} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial \Theta}{r \partial \varphi} + \mu \left(\nabla^2 U_\varphi - \frac{U_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_r}{\partial \varphi} \right) + F_\varphi, \quad (1.23б)$$

$$\rho \frac{dU_z}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \mu \nabla^2 U_z + F_z, \quad (1.23в)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Компоненты напряжений имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -P + 2\mu \frac{\partial U_r}{\partial r} - \frac{2}{3} \mu \Theta, & \sigma_{r\varphi} &= \mu \left(\frac{\partial U_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial U_r}{r \partial \varphi} - \frac{U_\varphi}{r} \right), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -P + 2\mu \left(\frac{\partial U_\varphi}{r \partial \varphi} + \frac{U_r}{r} \right) - \frac{2}{3} \mu \Theta, & \sigma_{\varphi z} &= \mu \left(\frac{\partial U_z}{r \partial \varphi} + \frac{\partial U_\varphi}{\partial z} \right), \\ \sigma_{zz} &= -P + 2\mu \frac{\partial U_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \mu \Theta, & \sigma_{zr} &= \mu \left(\frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Рейнольдсовы уравнения движения для турбулентного потока могут быть получены в нашем случае путем замены величин ρ , P , U_r , U_φ и U_z следующими выражениями:

$$\rho = \bar{\rho} + \tilde{\rho}, \quad P = \bar{P} + p,$$

$$U_r = \bar{U}_r + u_r, \quad U_\varphi = \bar{U}_\varphi + u_\varphi, \quad U_z = \bar{U}_z + u_z$$

и выполнения операции осреднения, как это было сделано выше; рекомендуем читателю проделать все эти выкладки самостоятельно. В результате для осредненного движения получаются члены, совершенно одинаковые с членами уравнений (1.23), и, кроме того, дополнительные члены, связанные с двойными и тройными корреляциями между пульсациями плотности и компонентами турбулентных

пульсаций скорости. Например, в первом из уравнений (1.23) члены, связанные с турбулентными пульсациями, будучи перенесены в правую часть уравнения, образуют выражение

$$\begin{aligned} & -\bar{\rho} \left(\overline{u_r \frac{\partial u_r}{\partial r}} + \overline{u_\varphi \frac{\partial u_r}{r \partial \varphi}} + \overline{u_z \frac{\partial u_z}{\partial z}} - \frac{\overline{u_\varphi^2}}{r} \right) - \bar{\rho} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial t} - \bar{\rho} \bar{u}_r \frac{\partial \bar{U}_r}{\partial r} - \\ & - \bar{\rho} \bar{u}_\varphi \left(\frac{\partial \bar{U}_r}{r \partial \varphi} - \frac{2\bar{U}_\varphi}{r} \right) - \bar{\rho} \bar{u}_z \frac{\partial \bar{U}_z}{\partial z} - \bar{\rho} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} \bar{U}_r - \bar{\rho} \frac{\partial \bar{u}_r}{r \partial \varphi} \bar{U}_\varphi - \bar{\rho} \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} \bar{U}_z + \\ & + \frac{\bar{\rho} \overline{u^2}}{r} - \bar{\rho} \bar{u}_r \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} - \bar{\rho} \bar{u}_\varphi \frac{\partial \bar{u}_r}{r \partial \varphi} - \bar{\rho} \bar{u}_z \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z}. \end{aligned}$$

Аналогичные результаты получаются для второго и третьего уравнений системы (1.23).

Можно заметить, что большинство турбулентных членов в этих уравнениях представляет собой корреляции, содержащие пульсации плотности; следовательно, в случае несжимаемой жидкости число этих членов значительно сократится. Приведем эту систему уравнений в полном виде для случая несжимаемой жидкости:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{d\bar{U}_r}{dt} - \frac{\bar{U}_\varphi^2}{r} \right) &= -\frac{\partial \bar{P}}{\partial r} + \mu \left(\nabla^2 \bar{U}_r - \frac{\bar{U}_r}{r^2} - 2 \frac{\partial \bar{U}_\varphi}{r^2 \partial \varphi} \right) - \frac{\rho}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \overline{u_r^2} - \\ & - \rho \frac{\partial}{r \partial \varphi} \overline{u_r u_\varphi} - \rho \frac{\partial}{\partial z} \overline{u_r u_z} + \rho \frac{\overline{u_\varphi^2}}{r} + \bar{F}_r, \\ \rho \left(\frac{d}{dt} \bar{U}_\varphi + \frac{\bar{U}_r \bar{U}_\varphi}{r} \right) &= -\frac{\partial \bar{P}}{r \partial \varphi} + \mu \left(\nabla^2 \bar{U}_\varphi - \frac{\bar{U}_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \bar{U}_r}{\partial \varphi} \right) - \\ & - \rho \frac{\partial}{r \partial \varphi} \overline{u_\varphi^2} - \rho \frac{\partial}{\partial r} \overline{u_\varphi u_r} - \rho \frac{\partial}{\partial z} \overline{u_\varphi u_z} - 2\rho \frac{\overline{u_\varphi u_r}}{r} + \bar{F}_\varphi, \quad (1.25) \\ \rho \frac{d\bar{U}_z}{dt} &= -\frac{\partial \bar{P}}{\partial z} + \mu \nabla^2 \bar{U}_z - \rho \frac{\partial}{\partial z} \overline{u_z^2} - \frac{\rho}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \overline{u_r u_z} - \rho \frac{\partial}{r \partial \varphi} \overline{u_\varphi u_z} + \bar{F}_z. \end{aligned}$$

Компоненты напряжений запишутся так:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -\bar{P} + 2\mu \frac{\partial \bar{U}_r}{\partial r} - \rho \overline{u_r^2}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = -\bar{P} + 2\mu \left(\frac{\partial \bar{U}_\varphi}{r \partial \varphi} + \frac{\bar{U}_r}{r} \right) - \rho \overline{u_\varphi^2}, \\ \sigma_{zz} &= -\bar{P} + 2\mu \frac{\partial \bar{U}_z}{\partial z} - \rho \overline{u_z^2}, \quad \sigma_{r\varphi} = \mu \left(\frac{\partial \bar{U}_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial \bar{U}_r}{r \partial \varphi} - \frac{\bar{U}_\varphi}{r} \right) - \rho \overline{u_r u_\varphi}, \quad (1.26) \\ \sigma_{zr} &= \mu \left(\frac{\partial \bar{U}_r}{\partial z} + \frac{\partial \bar{U}_z}{\partial r} \right) - \rho \overline{u_r u_z}, \quad \sigma_{\varphi z} = \mu \left(\frac{\partial \bar{U}_z}{r \partial \varphi} + \frac{\partial \bar{U}_\varphi}{\partial z} \right) - \rho \overline{u_\varphi u_z}. \end{aligned}$$

Сравнив выражения (1.26) с соответствующими выражениями из (1.18), можно заметить, что эти соотношения для турбулентных напряжений одинаковы.

§ 1.3. Уравнение сохранения транспортабельной скалярной субстанции в турбулентном потоке

Рассмотрим теперь перенос некоторой скалярной субстанции, например тепла, энергии или вещества, в турбулентном потоке несжимаемой жидкости. Выражаясь более точно, будем рассматривать явление переноса при турбулентных движениях без учета переноса посредством молекулярной диффузии или вынужденной конвекции, обусловленной осредненной скоростью потока.

Применение закона сохранения скалярной субстанции Γ в единице массы к процессу вынужденной конвекции через элементарный объем жидкости дает

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + U_i \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(f \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} \right) + F_\Gamma, \quad (1.27)$$

где f означает коэффициент молекулярного переноса. Здесь F_Γ — «движущая сила» источника; если, например, переносится тепло, то F_Γ характеризует выделение тепла при диссипации кинетической энергии потока.

Если считать f постоянной величиной и положить, что

$$\Gamma = \bar{\Gamma} + \gamma, \quad U_i = \bar{U}_i + u_i,$$

то после выполнения обычной операции осреднения для левой части этого уравнения получим

$$\frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial t} + \bar{U}_i \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial x_i} + \overline{u_i \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}} = \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial t} + \bar{U}_i \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u_i \gamma} + \bar{F}_\Gamma,$$

поскольку в случае несжимаемой жидкости $\gamma \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) = 0$.

Подстановка этого выражения в уравнение (1.27) после некоторых преобразований дает

$$\frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial t} + \bar{U}_i \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(f \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial x_i} - \overline{u_i \gamma} \right) + \bar{F}_\Gamma. \quad (1.28)$$

Таким образом, на распределение $\bar{\Gamma}$ при осредненном движении влияет молекулярная диффузия и конвективные турбулентные движения, причем последний эффект определяется корреляцией $\overline{u_i \gamma}$ между турбулентными пульсациями скорости и скалярной субстанции. Точно так же, как это сделал Буссинеск в случае переноса импульса, мы тоже можем формально ввести здесь коэффициент турбулентного или вихревого переноса ϵ_γ :

$$-\overline{u_i \gamma} = \epsilon_\gamma \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial x_i}. \quad (1.29)$$

Вследствие того, что величины $\overline{u_i \gamma}$ и $\partial \overline{\Gamma} / \partial x_i$ являются векторными, коэффициент турбулентного переноса должен быть либо тензором второго ранга, либо скаляром; в последнем случае справедливы соотношения (1.29). Здесь снова можно подчеркнуть, что коэффициент турбулентного переноса, вообще говоря, не остается постоянным по всему полю течения. Когда коэффициент переноса представляет собой тензор второго ранга, то связь между $\overline{u_i \gamma}$ и $\partial \overline{\Gamma} / \partial x_i$ должна иметь следующий вид:

$$-\overline{u_i \gamma} = (\epsilon_{\gamma})_{ij} \frac{\partial \overline{\Gamma}}{\partial x_j}. \quad (1.30)$$

§ 1.4. Двойные корреляции между компонентами турбулентных пульсаций скорости

В этом и последующих параграфах мы будем считать жидкость несжимаемой, а вязкость — постоянной. В § 1.2 было показано, что компоненты турбулентных пульсаций скорости в некоторой точке фигурируют в уравнениях движения в виде двойных корреляций $\overline{u_i u_j}$ и что величины $\rho \overline{u_i u_j}$ можно рассматривать как нормальные (при $i = j$) и касательные (при $i \neq j$) турбулентные напряжения.

Воспользуемся теперь для анализа этих турбулентных напряжений методом, который обычно применяется в случае напряжений, возникающих под действием вязкости, и посмотрим, к каким результатам это приведет. Рассмотрим, например, малый элемент поверхности dS в жидкости, нормаль N к которому составляет с осями координат x_i углы ni .

Пусть $\sigma_{Nn} = -\rho \overline{u_n^2}$ — нормальная компонента полного турбулентного напряжения, действующего на выделенный элемент поверхности; тогда, пользуясь упомянутым выше методом анализа напряжений, установим связь этой нормальной компоненты с напряжениями $\sigma_{ij} = -\rho \overline{u_i u_j}$. Полное турбулентное напряжение σ_N может быть разложено на три компоненты σ_{Ni} вдоль i -ых направлений координатных осей. Между σ_{Nn} и σ_{Ni} существует следующая связь (см. рис. 1.12):

$$\sigma_{Nn} = \sigma_{Ni} \cos ni = \sigma_{Ni} e_{ni},$$

где $\cos ni$ — направляющий косинус нормали N относительно оси i — для краткости записан в виде e_{ni} .

Для равновесия жидкого элемента $OABC$ требуется, чтобы

$$\sigma_{Ni} = \sigma_{ij} e_{nj}.$$

Отсюда

$$\sigma_{Nn} = \sigma_{ij} e_{ni} e_{nj}.$$

Аналогично давление в турбулентном потоке можно определить путем осреднения величин в соотношениях (1.31) по всем направлениям N . Поскольку

$$\overline{e_{ni}e_{nj}} = \frac{1}{3} \delta_{ij},$$

то из (1.31) имеем

$$\overline{u_n^2} = \frac{1}{3} \overline{u_i u_i} = \frac{2}{3} \times (\text{кинетическая энергия})$$

(среднее по всем n). Этот результат интересно сравнить с уравнением (1.4).

В общем случае, рассмотренном выше, напряжения $\rho \overline{u_i^2}$, соответствующие $i=1, 2$ или 3 , различны. А каков физический смысл совпадения величин $\overline{u_i^2}$ для различных значений $i=1, 2$ и 3 ? В этом случае эллипсоид превращается в сферу, и уравнение (1.33) оказывается справедливым для любой системы координат; другими словами, это уравнение становится инвариантным относительно поворота системы координат и отражения от координатных плоскостей. Течение, которое описывается таким уравнением, называется изотропным. Ввиду того, что в этом случае ни в какой системе координат членов вида $\overline{u_i u_j}$ при $i \neq j$ не наблюдается, в изотропном турбулентном потоке не может существовать среднего турбулентного напряжения сдвига.

Кроме корреляций между компонентами скорости в фиксированной точке течения, имеющими ясный физический смысл (эти корреляции суть напряжения), существуют корреляции между скоростями в двух различных точках течения, которые имеют важное значение, ибо их можно использовать при анализе изменения поля течения во времени. При этом, например, оказывается возможным определить те области течения, в которых движения жидкости некоторым образом связаны, или коррелируют, друг с другом.

Пусть A и B — две точки потока, а a и b — соответственно два заданных направления в точках A и B . Тогда соответствующие компоненты скорости вдоль этих направлений будут U_a и U_b . Какова корреляция между этими скоростями?

Значения скоростей U_a и U_b складываются из осредненной скорости и турбулентных пульсаций скорости соответственно в точках A и B . Предположим, что в рассматриваемом турбулентном течении осредненная скорость имеет постоянную величину. Далее, положим для простоты, что эта осредненная скорость направлена вдоль оси x_1 . Следовательно, для произвольного момента времени

имеем

$$\begin{aligned} U_a &= \bar{U}_1 e_{a1} + u_a \quad \text{в точке } A, \\ U_b &= \bar{U}_1 e_{b1} + u_b \quad \text{в точке } B, \end{aligned}$$

где e_{a1} и e_{b1} — направляющие косинусы соответственно для направлений a и b относительно оси x_1 .

Корреляционное произведение $(U_a)_A$ и $(U_b)_B$,

$$\overline{(U_a)_A (U_b)_B} = \bar{U}_1^2 e_{a1} e_{b1} + \overline{(u_a)_A (u_b)_B},$$

слагается, как видим, из двух частей; для описания турбулентного течения представляет интерес лишь второе слагаемое, а именно $\overline{(u_a)_A (u_b)_B}$, которое соответствует турбулентным пульсациям скорости. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать только это слагаемое, т. е.

$$Q_{A, B} = \overline{(u_a)_A (u_b)_B}. \quad (1.34)$$

Для квазистационарного течения, т. е. такого, в котором осредненная картина не изменяется во времени, корреляционное произведение зависит только от местоположения точек A и B и направлений a и b . Отсюда, если эти местоположения и направления заданы, то $Q_{A, B}$ имеет фиксированное значение.

Теперь можно выразить величины $(u_a)_A$ и $(u_b)_B$ соответственно через компоненты скорости $(u_i)_A$ и $(u_i)_B$ вдоль осей координат:

$$u_a = u_i e_{ai}, \quad u_b = u_i e_{bi}. \quad (1.35)$$

Тогда подстановка выражений (1.35) в соотношение (1.34) дает

$$Q_{A, B} = \overline{(u_a)_A (u_b)_B} = \overline{(u_i)_A (u_j)_B} e_{ai} e_{bj}.$$

Поскольку осреднение производится по времени, а e_{ai} и e_{bj} — постоянные направляющие косинусы соответственно для направлений a и b , то черта сверху применяется фактически только к произведению $(u_i)_A (u_j)_B$:

$$Q_{A, B} = \overline{(u_a)_A (u_b)_B} = \overline{(u_i)_A (u_j)_B} e_{ai} e_{bj} = (Q_{i, j})_{A, B} e_{ai} e_{bj}. \quad (1.36)$$

Следовательно, $Q_{A, B}$ можно рассматривать как произведение $(Q_{i, j})_{A, B}$ и $e_{ai} e_{bj}$. Корреляция

$$(Q_{i, j})_{A, B} = \overline{(u_i)_A (u_j)_B} \quad (1.37)$$

представляет собой тензор второго ранга, так как при вращении системы координат она преобразуется, как тензор. Согласно правилу преобразования тензора (см. приложение), имеем

$$(Q_{p, q}^* = e_{ip} e_{jq} Q_{i, j})_{A, B},$$

где $(Q_{p,q})_{A,B}$ — тензор, соответствующий новой системе координат, ось p которой составляет с осью i исходной системы координат угол lp , а $e_{ip} = \cos lp$ и $e_{jq} = \cos jq$. Это соотношение легко доказывается:

$$(e_{ip}e_{jq}Q_{i,j})_{A,B} = e_{ip}e_{jq}\overline{(u_i)_A(u_j)_B} = \overline{(u_p)_A(u_q)_B} = (Q_{p,q})_{A,B}.$$

Как уже упоминалось, величина $Q_{A,B}$ имеет фиксированное значение и, согласно соотношению (1.36), может рассматриваться как скаляр, образованный при скалярном умножении тензора $(Q_{h,k})_{A,B}$ на тензор, или диаду, $e_{ai}e_{bj}$:

$$Q_{A,B} = \delta_{hi}\delta_{kj}(Q_{h,k})_{A,B}e_{ai}e_{bj} = (Q_{i,j})_{A,B}e_{ai}e_{bj}.$$

Уравнение (1.36) показывает, что корреляционное произведение $Q_{A,B} = \overline{(u_a)_A(u_b)_B}$ можно выразить через девять корреляций $\overline{(u_i)_A(u_j)_B}$.

Когда турбулентный поток является изотропным и однородным, возможны значительные упрощения. Как будет показано ниже, корреляцию $Q_{A,B}$ можно выразить через две корреляции специального типа.

Чтобы дать читателю представление о характерных особенностях изотропной турбулентности, приведем здесь доказательство этого положения для того частного случая, когда система координат расположена так, что ось x_1 проходит через обе наши точки A и B (см. рис. 1.13).

Согласно определению изотропии, любое соотношение между величинами, характеризующими турбулентность, должно быть инвариантно относительно поворота системы координат и отражения от координатных плоскостей.

Требуется доказать, что величина $Q_{A,B} = \overline{(u_a)_A(u_b)_B}$ может быть выражена через две корреляции. Это легко показать, если воспользоваться определением изотропии, т. е. тем, что при $i \neq j$

$$(Q_{i,j})_{A,B} = \overline{(u_i)_A(u_j)_B} = 0.$$

Рассмотрим, например, величины $(u_1)_A$ и $(u_2)_B$. При повороте системы координат вокруг оси x_1 на 180° , вследствие изотропии, должно быть справедливо соотношение

$$\overline{(u_1)_A(u_2)_B} = \overline{(u_1)_A[-(u_2)_B]} = -\overline{(u_1)_A(u_2)_B},$$

которое может выполняться только в том случае, когда $\overline{(u_1)_A(u_2)_B} = 0$.

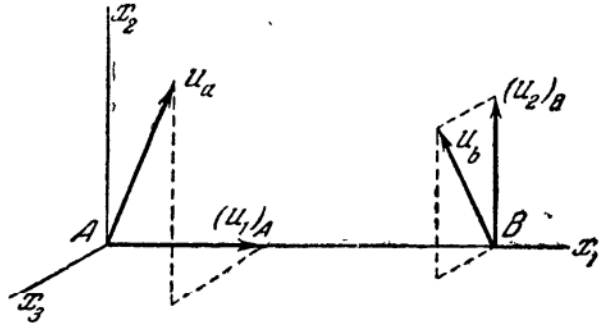


Рис. 1.13. Корреляция между скоростями u_a и u_b .

Отсюда имеем

$$Q_{A,B} = \overline{(u_a)_A (u_b)_B} = \overline{(u_i)_A (u_i)_B} e_{ai} e_{bi}. \quad (1.38)$$

Из трех корреляций

$$\overline{(u_1)_A (u_1)_B}, \quad \overline{(u_2)_A (u_2)_B}, \quad \overline{(u_3)_A (u_3)_B}$$

две последние должны быть одинаковы, потому что система координат инвариантна относительно поворота вокруг оси x_1 . Следовательно, величина $Q_{A,B}$ в самом деле определяется только двумя корреляциями, а именно: продольной корреляцией скорости $\overline{(u_1)_A (u_1)_B}$ и одной из поперечных корреляций скорости $\overline{(u_2)_A (u_2)_B}$ или $\overline{(u_3)_A (u_3)_B}$.

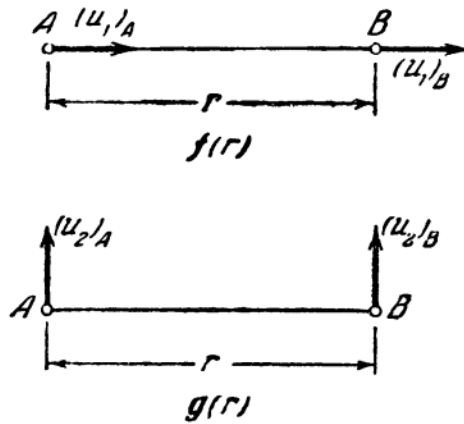


Рис. 1.14. Коэффициент продольной корреляции скорости f и коэффициент поперечной корреляции g .

Вместо корреляционных произведений $\overline{(u_a)_A (u_b)_B}$ и $\overline{(u_i)_A (u_j)_B}$ обычно принято пользоваться коэффициентами корреляции, которые определяются соотношениями

$$R_{A,B} = \frac{\overline{(u_a)_A (u_b)_B}}{\overline{(u'_a)_A (u'_b)_B}}, \quad (1.39)$$

$$(R_{i,j})_{A,B} = \frac{\overline{(u_i)_A (u_j)_B}}{\overline{(u'_i)_A (u'_j)_B}}.$$

В случае однородной изотропной турбулентности имеем

$$(u'_a)_A = (u'_i)_A = (u'_b)_B = (u'_j)_B,$$

поэтому для краткости все эти величины можно обозначить через u' .

Коэффициенты этих двух специальных типов корреляции, через которые может быть выражена корреляция $Q_{A,B}$ или ее коэффициент $R_{A,B}$, обычно обозначаются символами f и g соответственно для коэффициентов продольной и поперечной корреляции скорости (см. рис. 1.14). Тогда соотношение, соответствующее выражению (1.38), запишется в следующем виде:

$$R_{A,B} = f e_{a1} e_{b1} + g (e_{a2} e_{b2} + e_{a3} e_{b3}).$$

Ниже, в главе 3, мы рассмотрим, каким образом можно выразить коэффициент корреляции $R_{A,B}$ для произвольной системы координат через эти две величины f и g , а также через расстояние r между точками A и B .

§ 1.5. Изменение двойных корреляций скорости по времени; тройные корреляции скорости

В реальной жидкости вязкие напряжения при турбулентных движениях вызывают диссипацию кинетической энергии этих движений в тепло. Если отсутствуют внешние факторы, способствующие непрерывному подводу энергии для поддержания турбулентных движений, то они с течением времени должны вырождаться. Существенный интерес представляет задача о том, как изменяются картина течения и соотношения между скоростями в ходе этого вырождения. Поскольку эти соотношения описываются тензором $(Q_{ij})_{A,B}$ двойных корреляций скорости, то нам следует рассмотреть изменение этого тензора во времени.

Начнем с анализа уравнений движения, поскольку именно они описывают турбулентные движения. Эти уравнения следует преобразовать таким образом, чтобы в результате получились другие уравнения, содержащие двойную корреляцию скорости $(u_a)_A(u_b)_B$. Тогда интересующая нас величина будет представляться производной $\frac{\partial}{\partial t} \overline{(u_a)_A(u_b)_B}$.

Способ получения этой величины из уравнений движения состоит в следующем.

Поскольку $\overline{(u_a)_A(u_b)_B} = \overline{(u_i)_A(u_j)_B} e_{ai} e_{bj}$, то достаточно рассмотреть только изменение каждой величины $\overline{(u_i)_A(u_j)_B}$ в отдельности, а именно:

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{(u_i)_A(u_j)_B} = \overline{(u_i)_A \frac{\partial}{\partial t} (u_j)_B} + \overline{(u_j)_B \frac{\partial}{\partial t} (u_i)_A}.$$

Величина каждого члена в правой части этого уравнения может быть получена из уравнений движения для U_j в точке B и для U_i в точке A .

Приняв теперь, что осредненная скорость $\bar{U}_i$ во всей рассматриваемой области постоянна и не зависит от времени, положим

$$(U_i = \bar{U}_i + u_i)_A, \quad (U_j = \bar{U}_j + u_j)_B.$$

Уравнение движения для u_i в точке A имеет вид

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} u_i + (\bar{U}_k + u_k) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l} u_i \right]_A.$$

Умножим обе части этого уравнения на $(u_j)_B$:

$$\begin{aligned} (u_j)_B \frac{\partial}{\partial t} (u_i)_A + [\bar{U}_k + (u_k)_A] \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_A (u_i)_A (u_j)_B &= \\ &= -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_A p_A (u_j)_B + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l} \right)_A (u_i)_A (u_j)_B. \end{aligned}$$

При этом следует иметь в виду, что величина $(u_j)_B$ при операции дифференцирования в точке A может рассматриваться как постоянная.

Аналогично, умножив обе части уравнения движения для u_j в точке B на величину $(u_i)_A$, получим

$$\begin{aligned} (u_i)_A \frac{\partial}{\partial t} (u_j)_B + [\bar{U}_k + (u_k)_B] \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_B (u_j)_B (u_i)_A = \\ = - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_B p_B (u_i)_A + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l} \right) (u_j)_B (u_i)_A. \end{aligned}$$

Для несжимаемой жидкости имеем

$$u_i \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \quad \text{и} \quad u_j \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0,$$

а также, следовательно,

$$(u_j)_B \left(u_i \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)_A = 0 \quad \text{и} \quad (u_i)_A \left(u_j \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)_B = 0.$$

Если к преобразованному уравнению движения в точке A прибавить первый член, а к преобразованному уравнению движения в точке B — второй член и, наконец, почленно сложить оба уравнения, то получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (u_i)_A (u_j)_B + \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_A (u_i)_A (u_k)_A (u_j)_B + \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_B (u_i)_A (u_k)_B (u_j)_B \right] + \\ + \bar{U}_k \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_A (u_i)_A (u_j)_B + \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_B (u_i)_A (u_j)_B \right] = \\ = - \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_A p_A (u_j)_B + \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_B p_B (u_i)_A \right] + \\ + \nu \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \right)_A + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \right)_B \right] (u_i)_A (u_j)_B. \end{aligned}$$

Нас интересует взаимосвязь турбулентных движений в точках A и B . Следовательно, какую именно из точек A и B мы выберем в качестве начала системы координат, не имеет значения. Считая началом координат точку A , имеем

$$\xi_k = (x_k)_B - (x_k)_A.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_A = - \frac{\partial}{\partial \xi_k}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_B = \frac{\partial}{\partial \xi_k}, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \right)_A = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \right)_B = \frac{\partial^2}{\partial \xi_k \partial \xi_k}. \end{aligned}$$

Если воспользоваться этими соотношениями, то приведенное выше уравнение после осреднения по времени примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{(u_i)_A (u_j)_B} - \frac{\partial}{\partial \xi_k} \overline{(u_i)_A (u_k)_A (u_j)_B} + \frac{\partial}{\partial \xi_k} \overline{(u_i)_A (u_k)_B (u_j)_B} = \\ = -\frac{1}{\rho} \left[-\frac{\partial}{\partial \xi_i} \overline{p_A (u_j)_B} + \frac{\partial}{\partial \xi_j} \overline{p_B (u_i)_A} \right] + 2\nu \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \overline{(u_i)_A (u_j)_B}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Заметим, что член, содержащий $\overline{U_k}$, исчез. Полученное в результате уравнение (1.40) описывает соотношения между турбулентными движениями точно так же, как если бы мы рассматривали турбулентные движения относительно системы координат, движущейся с осредненной скоростью $\overline{U_k}$.

Далее видим, что уравнение (1.40), помимо членов с двойными корреляциями скорости $\overline{(u_i)_A (u_j)_B}$, содержит еще и такие двойные корреляции, как $\overline{p_A (u_j)_B}$, а также члены с тройными корреляциями типа $\overline{(u_i)_A (u_k)_A (u_j)_B}$.

Поскольку давление является скалярной величиной, корреляции $\overline{p_A (u_j)_B}$ и $\overline{p_B (u_i)_A}$ образуют тензоры первого ранга; тройные корреляции $\overline{(u_i)_A (u_k)_A (u_j)_B}$ и $\overline{(u_i)_A (u_k)_B (u_j)_B}$ образуют тензоры третьего ранга.

В последующих выкладках мы будем обозначать эти корреляционные тензоры первого и третьего рангов соответственно символами $(K_{p,i})_A$ и $(S_{ij,k})_{A,B}$.

Таким образом,

$$(K_{i,p})_{A,B} = \overline{(u_i)_A p_B}, \quad (K_{p,j})_{A,B} = \overline{p_A (u_j)_B} \quad (1.41)$$

и

$$(S_{ik,j})_{A,B} = \overline{(u_i)_A (u_k)_A (u_j)_B}, \quad (S_{i,kj})_{A,B} = \overline{(u_i)_A (u_k)_B (u_j)_B}. \quad (1.42)$$

Заметим, что индекс p в символе $K_{i,p}$ соответствует давлению p и не является формальным индексом типа i или j , поэтому суммирование не распространяется на p .

С учетом всех этих замечаний уравнение (1.40) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} Q_{i,j} - \frac{\partial}{\partial \xi_k} S_{ik,j} + \frac{\partial}{\partial \xi_k} S_{i,kj} = \\ = -\frac{1}{\rho} \left(-\frac{\partial}{\partial \xi_i} K_{p,j} + \frac{\partial}{\partial \xi_j} K_{i,p} \right) + 2\nu \frac{\partial^2}{\partial \xi_k \partial \xi_k} Q_{i,j}, \end{aligned} \quad (1.43)$$

где все корреляции соответствуют точкам A и B .

В наши намерения не входит давать здесь решение этого уравнения. Ниже, в главе 3, будет дано решение этого уравнения для случая изотропной турбулентности, когда это уравнение значительно упрощается.

Здесь уместно будет заметить лишь, что для решения этого уравнения относительно тензора двойных корреляций скорости $Q_{i,j}$ требуется знать другие тензоры, а именно $K_{p,i}$, а также $S_{ik,j}$ и $S_{i,kj}$. Как мы увидим ниже, это обстоятельство представляет собой основное препятствие для решения проблемы турбулентности этим путем.

Как и в случае двойных корреляций скорости, для двойных корреляций давления и скорости и для тройных корреляций скорости принято обычно вводить соответствующие коэффициенты, определяемые формулами:

$$(L_{i,p})_{A,B} = \frac{1}{(u'_i)_A} (K_{i,p})_{A,B}, \quad (1.44)$$

$$(L_{p,j})_{A,B} = \frac{1}{(u'_j)_B} (K_{p,j})_{A,B},$$

$$(T_{ik,j})_{A,B} = \frac{(S_{ik,j})_{A,B}}{(u'_i)_A (u'_k)_A (u'_j)_B}, \quad (1.45)$$

$$(T_{i,kj})_{A,B} = \frac{(S_{i,kj})_{A,B}}{(u'_i)_A (u'_k)_B (u'_j)_B}.$$

Рис. 1.15. Коэффициенты тройной корреляции скорости $k(r)$, $h(r)$ и $q(r)$.

В предыдущем параграфе было показано, что в случае однородной изотропной турбулентности представляется целесообразным выразить коэффициент корреляции $R_{A,B}$ через две корреляции специального вида $f(r, t)$ и $g(r, t)$. Ниже, в главе 3, мы покажем, что для этого типа турбулентности коэффициент тройной корреляции скорости может быть выражен всего лишь через три коэффициента корреляции специального вида, обозначаемые символами $k(r, t)$, $h(r, t)$ и $q(r, t)$ (см. рис. 1.15):

$$k(r, t) = \frac{\overline{(u_1^2)_A (u_1)_B}}{u'^3} = T_{11,1},$$

$$h(r, t) = \frac{\overline{(u_2^2)_A (u_1)_B}}{u'^3} = T_{22,1} \quad (1.46)$$

$$q(r, t) = \frac{\overline{(u_2)_A (u_1)_A (u_2)_B}}{u'^3} = T_{21,2}.$$

§ 1.6. Свойства двойных продольных и поперечных корреляций при однородной турбулентности

В этом параграфе мы рассмотрим несколько важных свойств коэффициентов продольной и поперечной корреляции $f(r, t)$ и $g(r, t)$, которые были введены в § 1.4. Поскольку эти свойства одинаковы для обоих коэффициентов корреляции, то будет вполне достаточно рассмотреть здесь только один из них; мы выберем для этой цели коэффициент поперечной корреляции g между поперечными компонентами скорости в двух точках A и B . Для простоты будем считать, что точки A и B расположены на оси x_2 , причем точка A имеет координату ξ_2 , а точка B — координату $\xi_2 + x_2$.

По определению имеем

$$g(x_2) = \frac{\overline{u_1(\xi_2) u_1(\xi_2 + x_2)}}{\overline{u_1'(\xi_2) u_1'(\xi_2 + x_2)}}. \quad (1.47)$$

Здесь операция осреднения может быть произведена по времени. Но ввиду того, что турбулентность по своим средним статистическим свойствам считается однородной по всему течению, то представляется возможным произвести осреднение также и по координате ξ_2 . Рассмотрим для этой цели большое число точек A и B на оси x_2 , расположенных через постоянные интервалы x_2 , и найдем среднее значение корреляции для всех этих точек. Таким образом, имеем

$$\overline{u_1(\xi_2) u_1(\xi_2 + x_2)} = \frac{1}{\xi_2'' - \xi_2'} \int_{\xi_2'}^{\xi_2''} u_1(\xi_2) u_1(\xi_2 + x_2) d\xi_2,$$

где $(\xi_2'' - \xi_2')$ представляет собой диапазон значений ξ_2 , рассматриваемых в процессе осреднения.

На основании предположения об однородности имеем

$$u_1'(\xi_2) = u_1'(\xi_2 + x_2) = u_1'.$$

Из определения величины g следует, что $g(0) = 1$. Покажем, прежде всего, что эта величина является, кроме того, и максимальным значением коэффициента корреляции $g(x_2)$, т. е.

$$g(x_2) \leq 1. \quad (1.48)$$

Для этой цели рассмотрим квадрат разности скоростей

$$[u_1(\xi_2 + x_2) - u_1(\xi_2)]^2 \geq 0,$$

откуда следует, что

$$2u_1'^2 - 2\overline{u_1(\xi_2 + x_2) u_1(\xi_2)} \geq 0,$$

и, таким образом, соотношение (1.48) доказано.

Далее, из однородности течения следует, что корреляция должна быть симметричной функцией от x_2 . Это свойство вытекает из того, что, вследствие однородности, значение корреляции не должно изменяться при уменьшении координат точек A и B на величину x_2 . Но это равноценно изменению положительного знака x_2 в выражении (1.48) на отрицательный. Значит,

$$g(x_2) = g(-x_2). \quad (1.49)$$

Следовательно, коэффициент g является симметричной функцией от x_2 , причем его величина при $x_2 = 0$ достигает максимального значения, равного единице, а при увеличении x_2 убывает. Если основываться на интуиции, то можно было бы ожидать, что коэффициент g , уменьшаясь, в конечном счете обращается в нуль при стремлении x_2 к бесконечности. Убывание g с возрастанием x_2 должно зависеть от характера турбулентности. Оно может быть монотонного или колебательного типа. Поэтому в общем случае о форме корреляционной функции можно сказать очень мало. Можно высказать лишь некоторые соображения о форме этой функции в непосредственной окрестности точки $x_2 = 0$. В самом деле, оказывается возможным вывести определенные интересные соотношения между скоростью и различными ее производными как следствие однородности поля течения, а затем использовать эти соотношения для описания формы корреляционной функции при $x_2 = 0$.

Из предположения об однородности следует, что

$$\overline{u_1(\xi_2) u_1(\xi_2 + x_2)} = \overline{u_1(\xi_2 - x_2) u_1(\xi_2)},$$

откуда

$$\overline{u_1(\xi_2) \frac{\partial u_1(\xi_2 + x_2)}{\partial (\xi_2 + x_2)}} = - \overline{\frac{\partial u_1(\xi_2 - x_2)}{\partial (\xi_2 - x_2)} u_1(\xi_2)}.$$

Следовательно,

$$u_1'^2 \left[\frac{\partial g}{\partial x_2} \right]_{x_2=0} = \overline{\left[u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right]_{x_2=0}} = - \overline{\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2} u_1 \right]_{x_2=0}} = 0.$$

Опять-таки вследствие однородности имеем

$$\overline{u_1(\xi_2 - x_2) \frac{\partial u_1(\xi_2)}{\partial x_2}} = \overline{u_1(\xi_2) \frac{\partial u_1(\xi_2 + x_2)}{\partial x_2}},$$

откуда

$$- \overline{\frac{\partial u_1(\xi_2 - x_2)}{\partial (\xi_2 - x_2)} \frac{\partial u_1(\xi_2)}{\partial x_2}} = \overline{u_1(\xi_2) \frac{\partial^2 u_1(\xi_2 + x_2)}{\partial x_2 \partial (\xi_2 + x_2)}}.$$

Следовательно,

$$u_1'^2 \left[\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} \right]_{x_2=0} = \overline{\left[u_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right]_{x_2=0}} = - \overline{\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right]^2_{x_2=0}}.$$

Аналогичным способом эти соотношения можно обобщить и на случай производных более высокого порядка. В результате имеем

$$\left[\frac{\partial^{n+m} g}{\partial x_2^{n+m}} \right]_{x_2=0} = \frac{1}{u_1'^2} \overline{\left[\frac{\partial^n u_1}{\partial x_2^n} \frac{\partial^m u_1}{\partial x_2^m} \right]_{x_2=0}} = 0, \quad (1.50)$$

если $(n + m)$ — нечетное число, и

$$\left[\frac{\partial^{2n} g}{\partial x_2^{2n}} \right]_{x_2=0} = \frac{1}{u_1'^2} \overline{\left[u_1 \frac{\partial^{2n} u_1}{\partial x_2^{2n}} \right]_{x_2=0}} = (-1)^n \frac{1}{u_1'^2} \overline{\left[\frac{\partial^n u_1}{\partial x_2^n} \right]^2_{x_2=0}}. \quad (1.51)$$

Как указывалось выше, форму корреляционной функции при $x_2 = 0$ можно описать с помощью производных от скорости в этой точке. Для этого разложим $g(x_2)$ в ряд Тейлора, приняв при этом во внимание, что функция $g(x_2)$ симметрична относительно x_2 :

$$g(x_2) = 1 + \frac{1}{2!} x_2^2 \left[\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} \right]_{x_2=0} + \frac{1}{4!} x_2^4 \left[\frac{\partial^4 g}{\partial x_2^4} \right]_{x_2=0} + \dots$$

Если ввести сюда соотношения (1.51), то получим

$$g(x_2) = 1 - \frac{x_2^2}{2!} \frac{1}{u_1'^2} \overline{\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right]^2_{x_2=0}} + \frac{x_2^4}{4!} \frac{1}{u_1'^2} \overline{\left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right]^2_{x_2=0}} - \dots \quad (1.52)$$

При очень малых значениях x_2 корреляция $g(x_2)$ стремится к параболической зависимости от x_2 .

Введем некоторую длину λ_g , такую, что при очень малых значениях x_2

$$g(x_2) \approx 1 - \frac{x_2^2}{\lambda_g^2}, \quad (1.53)$$

Из этого определения величины λ_g следует, что

$$\frac{1}{\lambda_g^2} = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} \right]_{x_2=0} \quad (1.54)$$

и

$$\frac{1}{\lambda_g^2} = \frac{1}{2u_1'^2} \overline{\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right]^2_{x_2=0}}. \quad (1.55)$$

Поскольку величина $\overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2_{x_2=0}}$ определяет среднеквадратичную интенсивность локального изменения u_1 , то λ_g можно рассматривать как меру этого изменения. Представим, что это локальное изменение u_1 обусловлено вихрями наименьшего размера, наблюдающимися в турбулентном течении. Тогда величину λ_g можно также

рассматривать как характеристику среднего размера этих наименьших вихрей. Как будет показано ниже, диссипация кинетической энергии течения в тепло под воздействием молекулярной вязкости определяется величиной $\overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2}_{x_2=0}$. Следовательно, можно также сказать,

что λ_g является мерой среднего размера вихрей, через которые, главным образом, и осуществляется диссипация *). В зависимости от того, рассматривается ли эта величина как мера наименьших вихрей

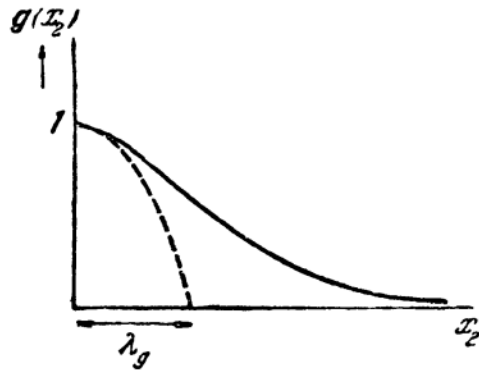


Рис. 1.16. Парабола, соприкасающаяся с кривой изменения коэффициента поперечной корреляции $g(x_2)$, и микромасштаб (или масштаб диссипации) λ_g .

или как характеристика размера вихрей, в основном способствующих диссипации, λ_g называется микромасштабом или масштабом диссипации.

Поскольку уравнение (1.53) описывает параболу с вершиной в точке $x_2 = 0$, $g = 1$, где она соприкасается с корреляционной кривой, величина λ_g отыскивается по пересечению этой параболы с осью x_2 (см. рис. 1.16).

В начале этого параграфа упоминалось о том, что для коэффициента продольной корреляции

$$f(x_1) = \frac{u_1(\xi_1) u_1(\xi_1 + x_1)}{u_1'^2}$$

применим аналогичный анализ, который приводит к тем же результатам. Таким образом, мы можем ввести также и микромасштаб, или масштаб диссипации, λ_f . Но поскольку в общем случае

$$\overline{\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right]^2}_{x_1=0} \neq \overline{\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right]^2}_{x_2=0},$$

то и $\lambda_f \neq \lambda_g$. Соотношение между λ_f и λ_g , например, при изотропной турбулентности можно найти в главе 3.

§ 1.7. Макро- или интегральный масштаб турбулентности

Помимо длины λ_g или λ_f имеется другая длина, являющаяся важной характеристикой структуры турбулентности. Это новую длину можно, до некоторой степени, считать мерой наибольшего расстояния связанности, или расстояния корреляции, между скоростями в двух точках поля течения. Логично ожидать, что с увеличением

*) Более правильно было бы сказать, что λ_g является характеристикой размера вихрей, которые при одинаковой интенсивности производят ту же диссипацию, что и рассматриваемая турбулентность.

расстояния степень этой корреляции будет уменьшаться и что вне некоторого интервала конечной длины эта корреляция практически обращается в нуль. Таким образом, $g \approx 0$ при $x_2 > x_2^*$, где x_2^* — расстояние корреляции.

Однако эта новая, только что введенная длина берется не равной этому расстоянию корреляции x_2^* , а определяется соотношением

$$\Lambda_g = \int_0^{\infty} g(x_2) dx_2. \quad (1.56)$$

Поэтому эта длина называется еще также интегральным масштабом.

Величина Λ_g будет сравнима с величиной x_2^* , если форма кривой функции g не слишком сильно отличается от прямоугольной. Разница между ними становится существенной, когда g принимает отрицательные значения при больших величинах x_2 , которые наверняка будут иметь место, если, например, картина течения обладает некоторой постоянной периодичностью и, следовательно, кривая g при больших величинах x_2 колеблется около оси x_2 .

Для иллюстрации указанного влияния периодичности рассмотрим одну строго периодическую функцию от x_2 :

$$u_1 = u_1' \sqrt{2} \sin 2\pi \frac{x_2}{X}.$$

Тогда, по определению,

$$\begin{aligned} g(x_2) &= \frac{\overline{u_1(\xi_2) u_1(\xi_2 + x_2)}}{u_1'^2} = \frac{2}{\Xi} \int_0^{\Xi} \sin 2\pi \frac{\xi_2}{X} \sin 2\pi \frac{\xi_2 + x_2}{X} d\xi_2 = \\ &= \frac{2}{\Xi} \left(\cos \frac{2\pi x_2}{X} \int_0^{\Xi} \sin^2 2\pi \frac{\xi_2}{X} d\xi_2 + \sin \frac{2\pi x_2}{X} \int_0^{\Xi} \sin 2\pi \frac{\xi_2}{X} \cos 2\pi \frac{\xi_2}{X} d\xi_2 \right). \end{aligned}$$

Если положить $\Xi \rightarrow \infty$, то $g(x_2)$ становится строго периодической функцией от x_2 :

$$g(x_2) = \cos \frac{2\pi x_2}{X}.$$

Для этой периодической корреляционной функции интегральный масштаб Λ_g может быть определен только в том случае, если рассматривается конечная область интегрирования. Предположим, что предел интегрирования равен $\frac{1}{2} nX$, где n — большое число. Тогда получим $\Lambda_g = \left(\frac{X}{2\pi} \right) \sin \pi n$; следовательно, Λ_g обращается в нуль, когда n — целое число, и принимает значения между нулем и $\pm \frac{X}{2\pi}$, когда n — дробное число.

Отсюда следует, что, строго говоря, определение, даваемое формулой (1.56), имеет смысл только в том случае, если корреляционная функция не имеет строгой периодичности, что и наблюдается, когда турбулентные движения нерегулярны.

Периодичность картины течения не является существенным фактором, обуславливающим отрицательные значения g . Как будет показано ниже (в главе 3), при изотропной турбулентности, когда турбулентные движения целиком носят случайный характер, функция g при больших значениях x_2 становится отрицательной. Кроме того, на следующем примере мы также увидим, что g принимает отрицательные значения при больших x_2 .

Рассмотрим турбулентный поток в плоском канале шириной $2b$. Из условия неразрывности течения имеем

$$\int_{-b}^{+b} (\bar{U} + u) dx_2 = \int_{-b}^{+b} \bar{U} dx_2 = \text{const (постоянная по времени)}.$$

Следовательно, турбулентная пульсация $u(x_2)$ должна быть такова, чтобы в любой момент времени удовлетворялось соотношение

$$\int_{-b}^{+b} u(x_2) dx_2 = 0.$$

Тогда для любого момента времени имеем

$$u(0) \int_{-b}^{+b} u(x_2) dx_2 = \int_{-b}^{+b} u(0) u(x_2) dx_2 = 0.$$

Если произвести здесь осреднение по времени и ввести

$$\overline{u(0) u(x_2)} = u'(0) u'(x_2) g(x_2),$$

то

$$u'(0) \int_{-b}^{+b} u'(x_2) g(x_2) dx_2 = 0,$$

или

$$\int_{-b}^{+b} u'(x_2) g(x_2) dx_2 = 0.$$

Поскольку величина $u'(x_2)$ положительна, функция $g(x_2)$ при больших значениях x_2 должна стать отрицательной.

Аналогично в случае круглой трубы найдем, что

$$\int_0^{D/2} r u'(r) g(r) dr = 0.$$

Тэйлор [14] показал, что экспериментальные данные Симмонса подтверждают это соотношение.

§ 1.8. Эйлеровы временные корреляции

В предыдущих параграфах мы рассматривали корреляции между компонентами скорости в некоторой фиксированной точке течения и корреляции между компонентами скорости в двух точках течения; в последнем случае корреляции оказываются функциями расстояния между двумя выбранными точками. В этом параграфе мы рассмотрим корреляцию между значениями пульсирующей величины, например компоненты скорости в заданном направлении, в некоторой фиксированной точке течения в два различных момента времени t' и $t' - t$ или $t' + t$. По очевидным причинам мы будем называть эту корреляцию также эйлеровой корреляцией.

Рассмотрим компоненту скорости $u_1(x_j, t)$ при постоянном значении x_j . Предположим, что среднее статистическое изменение однородно по времени, т. е. что течение является квазистационарным. Попытаемся выяснить свойства эйлеровой корреляции

$$\overline{u_1(t') u_1(t' - t)}$$

или ее коэффициента

$$R_E(t) = \frac{\overline{u_1(t') u_1(t' - t)}}{u_1'^2}, \quad (1.57)$$

где осреднение произведено по времени t' .

На основании предположения об однородности можно показать точно так же, как это сделано в § 1.6, что $R_E(t)$ является симметричной функцией t и что выполняется следующее соотношение:

$$\left[\frac{\partial^{n+m} R_E}{\partial t^{n+m}} \right]_{t=0} = \frac{1}{u_1'^2} \left[\frac{\partial^n u_1}{\partial t^n} \frac{\partial^m u_1}{\partial t^m} \right]_{t=0} = 0 \quad (1.58)$$

при $(n + m)$ нечетном, и

$$\left[\frac{\partial^{2n} R_E}{\partial t^{2n}} \right]_{t=0} = \frac{1}{u_1'^2} \left[u_1 \frac{\partial^{2n} u_1}{\partial t^{2n}} \right]_{t=0} = \frac{1}{u_1'^2} (-1)^n \left[\frac{\partial^n u_1}{\partial t^n} \right]_{t=0}^2. \quad (1.59)$$

Следовательно, форма кривой $R_E(t)$ в окрестности точки $t = 0$ может быть описана при помощи производных от скорости по времени:

$$R_E(t) = 1 - \frac{t^2}{2u_1'^2} \left[\frac{\partial u_1}{\partial t} \right]_{t=0}^2 + \frac{t^4}{4! u_1'^2} \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \right]_{t=0}^2 - \dots \quad (1.60)$$

Уравнение параболы, которая касается кривой R_E вблизи ее вершины, имеет вид

$$R_E(t) \approx 1 - \frac{t^2}{\tau_E^2},$$

где

$$\frac{1}{\tau_E^2} = \frac{1}{2u_1'^2} \left[\frac{\partial u_1}{\partial t} \right]_{t=0}^2 = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 R_E}{\partial t^2} \right]_{t=0}. \quad (1.61)$$

В данном случае эйлеров временной микромасштаб является мерой наиболее быстрых изменений, которые происходят в пульсациях величины $u_1(t)$.

Подобно интегральному масштабу Λ , определенному уравнением (1.56), масштаб

$$\mathcal{J}_E = \int_0^\infty R_E(t) dt \quad (1.62)$$

можно рассматривать как весьма приближенную меру наибольшей протяженности связи при изменении величины $u_1(t)$ под действием турбулентных пульсаций.

Существует ли связь между величинами R_E и f или g ? Если поле турбулентности по своей среднестатистической структуре однородно, то есть основания ожидать, что такая связь существует. Однако ответить на вопрос, существует ли эта связь в общем случае, очень трудно. В настоящее время по этому вопросу почти ничего не известно.

Эта связь, да и то лишь приближенная, известна только для того случая, когда однородное течение имеет постоянную осредненную скорость, например $\bar{U}_1 = \bar{U}$, в направлении оси x_1 . В этом случае обычно считается (гипотеза Тэйлора), что

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\bar{U} \frac{\partial}{\partial x_1}. \quad (1.63)$$

Знак минус взят здесь потому, что положительное значение $\frac{\partial}{\partial x_1}$ в некоторой точке пространства соответствует отрицательному значению $\frac{\partial}{\partial t}$.

Более тщательный анализ вскоре покажет нам, что соотношение (1.63) выполняется приближенно, да и то лишь в том случае, когда величина u_1 очень мала по сравнению с $\bar{U}$. Это можно показать путем использования уравнения движения

$$\frac{dU_1}{dt} = \frac{du_1}{dt} = \frac{\partial u_1}{\partial t} + (\bar{U} + u_1) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} u_1$$

или

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} u_1.$$

Стало быть, гипотеза Тэйлора справедлива лишь в том случае, когда все члены в правой части уравнения очень малы по сравнению с чле-

нами в левой части. Это определенно имеет место, если $u_1/\bar{U} \ll 1$, так как пульсация давления p имеет порядок величины ρu_1^2 .

Более строгий подход к этой проблеме был предложен Корсином [15] и Линем [16]. Линь показал, что при изотропной турбулентности и больших числах Рейнольдса справедливость гипотезы Тэйлора может быть установлена на основании соотношения

$$\frac{(\overline{du_1/dt})^2}{\bar{U}^2 (\overline{\partial u_1/\partial x_1})^2} \approx 5 \frac{u_1'^2}{\bar{U}^2},$$

но что для потока с поперечным сдвигом справедливость гипотезы Тэйлора представляется менее ясной.

Физический смысл соотношения (1.63) состоит в том, что при $\bar{U} \gg u_1$ пульсации в некоторой фиксированной точке течения можно представить как результат воздействия всего турбулентного течения, проходящего через эту точку с постоянной скоростью $\bar{U}$. Осциллограмма пульсаций скорости в этой точке будет тогда почти идентична с мгновенным распределением скорости u_1 вдоль оси x_1 , проходящей через точку. Таким образом, корреляция $u_1(t') u_1(t' - t)$, осредненная по t' , должна быть идентична с корреляцией $u_1(\xi_1) u_1(\xi_1 - x_1)$, осредненной по ξ_1 ; следовательно,

$$f(x_1) \equiv R_E(t), \quad (1.64)$$

где связь между x_1 и t определяется формулой

$$|x_1 - x_1^0| = \bar{U} |(t - t^0)|. \quad (1.65)$$

Наконец, между эйлеровым интегральным масштабом $\mathcal{J}_E$, определенным формулой (1.62), и пространственным интегральным масштабом Λ_f , определяемым формулой

$$\Lambda_f = \int_0^\infty f(x_1) dx_1$$

[эквивалент выражения (1.56)], существует простая связь

$$\Lambda_f = \bar{U} \mathcal{J}_E. \quad (1.66)$$

Как мы увидим в главе 2, соотношение (1.65) или (1.63) может служить очень полезным средством упрощения методов измерения; но при этом следует иметь в виду, что эти соотношения носят приближенный характер.

Для почти изотропного турбулентного потока, наблюдаемого на больших расстояниях вниз по потоку от турбулизирующей сетки, осредненная скорость $\bar{U}$ обычно велика по сравнению с турбулентными

пульсациями; следовательно, степень приближения в соотношении (1.65) вполне достаточна. Вырождение является относительно медленным процессом; значит, течение можно считать достаточно однородным, чтобы пользоваться этим соотношением. Но если то же самое соотношение применять к измерениям в турбулентном потоке с поперечным сдвигом при наличии относительно больших пульсаций, какие существуют, например, в свободных струях, в которых картина турбулентного течения к тому же, конечно, неоднородна, то к анализу результатов подобных измерений следует подходить с большой осторожностью. Эту осторожность действительно необходимо проявлять в отношении всех полученных выше формул, основанных на предположении об однородности течения.

Представление о справедливости гипотезы Тэйлора (1.63) можно составить по рис. 1.17, на котором изображены корреляции $f(x_1)$ и

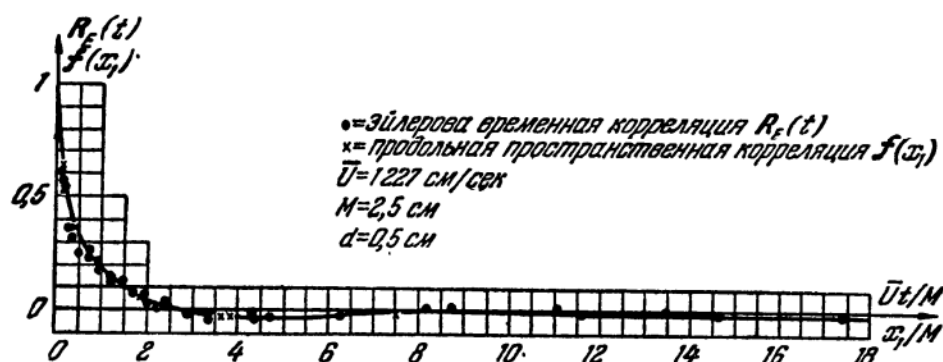


Рис. 1.17. Сравнение временной и пространственной корреляций по гипотезе Тэйлора [39].

$R_E(t)$, измеренные порознь в опытах Фаврэ и его сотрудников [39] в изотропном турбулентном потоке на расстоянии $x_1 = 40M$ вниз по течению от сетки ($\bar{U} = 1227$ см/сек; размер ячейки $M = 2,5$ см; диаметр стержней $d = 0,5$ см; $Re_M = \frac{\bar{U}M}{\nu} = 21\,500$; $\frac{u'_1}{\bar{U}}$ от 0,01 до 0,02).

§ 1.9. Турбулентная диффузия жидких частиц; лагранжевы корреляции

Известно, что при реальной турбулентности движения жидких частиц распределены хаотично. При турбулентных движениях, как и при движении молекул в газе, которое также носит хаотичный характер, две произвольные жидкие частицы или две молекулы движутся таким образом, что статистически расстояние между ними возрастает с течением времени. Если мы рассмотрим некоторое число частиц или молекул, расположенных в определенный момент

времени рядом друг с другом, и будем наблюдать положение различных частиц или молекул в последующие моменты времени, то мы заметим постепенное распространение этих частиц в пространстве. В этом состоит основной смысл диффузии.

В кинетической теории газов соотношения для диффузии молекул выводятся на основании понятия о хаотическом движении молекул. Для краткого ознакомления с этим вопросом можно рекомендовать «Введение в кинетическую теорию газов» Джинса [17].

При изучении диффузионных явлений часто вводят коэффициент диффузии. Рассмотрим, например, плоскость (x_1, x_3) , перпендикулярную к оси x_2 , и через Γ обозначим некоторую транспортабельную субстанцию. Тогда перенос $\mathfrak{S}_\Gamma$ субстанции через единицу площади нашей плоскости пропорционален градиенту величины Γ в направлении x_2 :

$$\mathfrak{S}_\Gamma = -D_\Gamma \frac{\partial \Gamma}{\partial x_2}.$$

Коэффициент диффузии для субстанции Γ определяется как коэффициент пропорциональности D_Γ .

Рассмотрим теперь вторую плоскость, параллельную первой и расположенную от нее на малом расстоянии dx_2 . Закон сохранения вещества применительно к субстанции Γ в пространстве между этими двумя плоскостями описывается уравнением

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = -\frac{\partial \mathfrak{S}_\Gamma}{\partial x_2} = D_\Gamma \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_2^2}. \quad (1.67)$$

Простейшее решение этого уравнения

$$\Gamma(x_2, t) = \frac{\text{const}}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{x_2^2}{4D_\Gamma t}\right) \quad (1.68)$$

соответствует случаю, в котором молекулы постепенно диффундируют от плоскости $x_2 = 0$. Уравнение (1.68) дает значение Γ при x_2 по истечении промежутка времени t с того момента, как молекулы начали диффундировать от плоскости $x_2 = 0$.

Если в качестве транспортабельной субстанции взять массу самих молекул, то получим

$$n(x_2, t) = \frac{\text{const}}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{x_2^2}{4Dt}\right), \quad (1.69)$$

где D — коэффициент молекулярной диффузии. Здесь $n(x_2, t)$ — число молекул, достигших плоскости x_2 по истечении времени t .

Рассмотрим теперь хаотичное движение молекул, предполагая, что отрезки свободного пробега всех молекул по длине одинаковы, постоянны, а по направлению параллельны направлению оси x_2 . Можно

показать [17], что вероятность продвижения молекулы на расстояние x_2 после прохождения ею N длин свободного пробега составляет

$$P(x_2, N) = \sqrt{\frac{2}{\pi N}} \exp\left(-\frac{x_2^2}{2l^2 N}\right), \quad (1.70)$$

где l — длина свободного пробега молекулы. Эту вероятность можно выразить также и через время t , если ввести скорость молекулы c ; тогда

$$N = \frac{ct}{l},$$

что вместе с соотношением (1.70) дает

$$P(x_2, t) = \sqrt{\frac{2l}{\pi ct}} \exp\left(-\frac{x_2^2}{2clt}\right).$$

Эта формула абсолютно одинакова с выражением (1.69). В самом деле, величина $P(x_2, t)$ идентична с $n(x_2, t)$; отсюда, как видим, получается

$$D = \frac{1}{2} cl = \frac{Nl^2}{2t}. \quad (1.71)$$

Рассмотрим, далее, случай последовательных перемещений молекул на расстояние Δy_i в направлении оси x_2 через интервалы времени Δt . Будем считать, что эти перемещения велики по сравнению с l , неодинаковы между собой, не зависят одно от другого и носят случайный характер. По истечении N интервалов времени результирующее перемещение молекулы будет

$$y_2 = \sum_1^N \Delta y_i.$$

Если предположить, что рассматриваемое поле однородно, то среднее значение перемещения по большому числу молекул будет равно нулю: $\bar{y}_2 = 0$. Однако среднеквадратичное значение (или дисперсия) величины y_2 будет равно

$$\bar{y}_2^2 = \overline{\left(\sum_1^N \Delta y_i\right)^2} = \overline{\sum_1^N \sum_1^N \Delta y_i \Delta y_j} = N \bar{\Delta y}^2,$$

поскольку средние значения членов, представляющих собой произведения, обращаются в нуль ввиду независимости отдельных перемещений.

В случае хаотичного движения молекул для коэффициента диффузии мы получим формулу (1.71), в которой величина Nl^2 представляет собой сумму квадратов перемещений молекул между последовательными столкновениями.

Если в последнем случае вместо Nl^2 взять сумму квадратов $N\overline{\Delta y^2}$, то выражение для коэффициента диффузии будет иметь вид

$$D = \frac{N\overline{\Delta y^2}}{2N\Delta t} = \frac{\overline{y_2^2}}{2t}. \quad (1.72)$$

Это соотношение, как и формула (1.71), показывает, что в процессе диффузии квадратный корень из среднеквадратичного значения $\sqrt{\overline{y_2^2}}$ пропорционален величине $\sqrt{t}$.

Следует заметить, что полученные выше результаты справедливы лишь в том случае, когда время диффузии велико по сравнению со временем, требующимся для прохождения средней длины свободного пробега или перемещения Δy_i . Кроме того, движения молекул предполагаются прерывными, и в приближенной теории, изложенной выше, считается, что молекулы при столкновениях полностью сохраняют свои свойства.

Попытаемся теперь применить подобный подход и к анализу процесса диффузии жидких частиц при турбулентном движении жидкости. При этом движения жидких частиц являются непрерывными; более того, весьма вероятно, что из-за интенсивного взаимодействия частиц между ними может происходить непрерывный обмен транспортабельной субстанцией.

Тэйлор [18], полагая движения жидких частиц непрерывными, обобщил этот анализ на случай диффузии в турбулентном потоке посредством рассмотрения пути, пройденного меченой жидкой частицей при ее движении в поле течения.

Пусть $v_2(t)$ — (турбулентная) скорость частицы в направлении оси x_2 . Расстояние $y_2(t) - y_2(0)$, проходимое меченой частицей в этом направлении за промежуток времени t , определяется формулой

$$y_2(t) = y_2(0) + \int_0^t v_2(t') dt'. \quad (1.73)$$

Читатель уже, по-видимому, заметил, что мы подчеркиваем различие между лагранжевой координатой частицы y_2 и эйлеровой координатой точки пространства x_2 .

Если бы функция $v_2(t)$ была периодической, то среднее значение $y_2(t)$ равнялось бы $y_2(0)$. При этом периодическом движении размер и число положительных «шагов» были бы равны размеру и числу отрицательных «шагов». При турбулентном движении это не совсем так, причем это отличие больше, чем в остальных рассмотренных случаях хаотичных движений. Интервалы с положительным значением v_2 могут быть больше или меньше интервалов с отрицательными

значениями. В результате по истечении некоторого промежутка времени частица получит положительное или отрицательное перемещение относительно $y_2(0)$.

Рассмотрим теперь большое число частиц и будем считать, что они последовательно начинают свое движение из фиксированной точки $O(x_1, x_2, x_3)$. Через определенный промежуток времени, прошедший с начального момента движения каждой частицы, некоторые из них получают результирующее перемещение в одном направлении, а некоторые — в другом. Если структура поля является изотропной и однородной как во времени, так и в пространстве, то распространение частиц будет (сферически) симметрично относительно точки O .

Предположим, далее, что все течение имеет постоянную скорость в направлении оси x_1 . Если в точке O к движущемуся полю непрерывно подводится красящее вещество, то вниз по потоку от этой точки можно будет наблюдать, как окрашенная полоса жидкости расширяется с увеличением расстояния от точки O , будучи симметричной относительно оси x_1 .

Эта симметрия наблюдается также и в тех условиях, когда течение неоднородно в направлении потока, но однородно в других направлениях. Однородность во времени остается при этом необходимым условием, ибо в противном случае мы не имели бы возможности производить осреднение по большому числу частиц, которые начинают свое движение в последовательные моменты времени.

Когда течение неоднородно по времени (нестационарное течение), то все еще оказывается возможным выполнить операцию осреднения по большому числу частиц, если рассматривать одновременный «старт» этих частиц из такого же множества точек поля при условии пространственной однородности течения.

Следовательно, для того чтобы осреднение по большому числу частиц было возможно, течение должно быть однородным либо во времени (если все частицы начинают свое движение из одной и той же точки), либо в пространстве (если частицы начинают свое движение в один и тот же момент времени из различных точек).

Чтобы более подробно изучить процесс диффузии при непрерывном турбулентном движении, впервые рассмотренный Тэйлором, предположим, что турбулентное течение однородно в пространстве и во времени. Наш анализ будет немного отличаться от того, который дан Тэйлором в его оригинальной работе [18]. Возьмем простейший случай диффузии только в одном направлении, скажем, вдоль оси x_2 . Уравнение (1.73) дает перемещение относительно точки $y_2(0)$ той частицы, скорость которой по истечении промежутка времени t равняется v_2 . Для простоты выберем эту точку в качестве начала отсчета, так что $y_2(0) = 0$. Поскольку $v_2(t)$ — случайная величина, то для большого числа частиц среднее значение $\bar{y}_2(t) = 0$.

Пусть $y_2(t_0 + t)$ — расстояние, пройденное меченой жидкой частицей с начального момента t_0 в течение интервала времени t :

$$y_2(t_0 + t) = \int_0^t v_2(t_0 + t') dt'.$$

Используя предположение об однородности течения, получаем выражение для дисперсии y_2 :

$$\begin{aligned} \overline{y_2^2}(t) &= \frac{1}{T} \int_0^T y_2^2(t_0 + t) dt_0 = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T dt_0 \int_0^t dt' \int_0^t v_2(t_0 + t') v_2(t_0 + t'') dt'' = \\ &= \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \frac{1}{T} \int_0^T v_2(t_0 + t') v_2(t_0 + t'') dt_0 = \\ &= \int_0^t dt' \int_0^t \overline{v_2(t_0 + t') v_2(t_0 + t'')} dt''. \end{aligned}$$

Осреднение выполняется здесь по большому числу частиц, движение которых начинается в различные моменты времени t_0 .

Область интегрирования в плоскости (t', t'') представляет собой квадрат с пределами 0 и t . Вместо этого квадрата можно взять два одинаковых треугольника, на которые делит квадрат его диагональ, так как подынтегральное выражение симметрично относительно t' и t'' . Тогда

$$\int_0^t \int_0^t dt' dt'' = 2 \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt''$$

и, следовательно,

$$\overline{y_2^2}(t) = 2 \int_0^t dt' \int_0^{t'} \overline{v_2(t_0 + t') v_2(t_0 + t'')} dt''. \quad (1.74)$$

В этом случае — в отличие от соответствующего случая хаотичного движения молекул — движения жидких частиц в моменты времени t' и t'' не являются независимыми, но в большей или меньшей степени связаны (коррелированы) друг с другом. Поэтому введем лагранжев коэффициент корреляции

$$R_L(\tau) = \frac{\overline{v_2(t) v_2(t + \tau)}}{v_2'^2}. \quad (1.75)$$

Чтобы подставить эту корреляцию в соотношение (1.74), положим

$$t'' - t' = \tau;$$

тогда (1.74) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \overline{y_2^2}(t) &= 2 \int_0^t dt' \int_{-t'}^0 \overline{v_2(t') v_2(t' + \tau)} d\tau = \\ &= 2 \int_0^t dt' \int_0^{t'} \overline{v_2(t') v_2(t' - \tau)} d\tau = 2v_2'^2 \int_0^t dt' \int_0^{t'} R_L(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (1.76)$$

Это и есть соотношение, полученное Тэйлором [18].

Если произвести интегрирование по частям, то это выражение можно записать в несколько ином виде:

$$\begin{aligned} \int_0^t dt' \int_0^{t'} R_L(\tau) d\tau &= \left| t' \int_0^{t'} R_L(\tau) d\tau \right|_0^t - \int_0^t t' R_L(t') dt' = \\ &= t \int_0^t R_L(\tau) d\tau - \int_0^t \tau R_L(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Тогда вместо (1.76) имеем

$$\overline{y_2^2}(t) = 2v_2'^2 \int_0^t (t - \tau) R_L(\tau) d\tau. \quad (1.77)$$

Это соотношение было впервые получено Кампе де Ферье [19].

Лагранжева корреляция $R_L(\tau)$ имеет свойства, подобные свойствам рассмотренных выше эйлеровых корреляций, а именно: $R_L(0) = 1$; $R_L(\tau)$ — симметричная относительно τ функция (вследствие однородности поля) и убывает с увеличением τ ; поэтому при больших значениях τ функция $R_L(\tau)$ в конечном счете обращается в нуль.

Особо рассмотрим очень малые и очень большие значения времени t .

При очень малых значениях τ корреляция $R_L(\tau)$ приблизительно равна единице и в любом из соотношений (1.76) и (1.77) ее можно считать постоянной величиной.

После интегрирования при условии, что t мало, а $R_L(\tau) \approx 1$, получаем

$$\overline{y_2^2}(t) \approx v_2'^2 t^2,$$

или

$$y_2'(t) \approx v_2' t. \quad (1.78)$$

Отсюда следует, что диффузия происходит пропорционально времени.

Если, с другой стороны, обратиться к очень продолжительным периодам времени, когда $t \gg t^*$, где t^* — промежуток времени, для которого $R_L(t^*) \approx 0$, то соотношение (1.77) дает

$$\int_0^t (t - \tau) R_L(\tau) d\tau = t \int_0^{t^*} R_L(\tau) d\tau - \int_0^{t^*} \tau R_L(\tau) d\tau.$$

При $t \gg t^*$ второй член в правой части этого уравнения очень мал по сравнению с первым членом, так что им можно пренебречь. Постоянную часть нашего интеграла обозначим через

$$\mathcal{J}_L = \int_0^{t^*} R_L(\tau) d\tau. \quad (1.79)$$

Величина $\mathcal{J}_L$ обычно рассматривается как мера наиболее длительного интервала времени, в течение которого частица, в среднем, испытывает перемещение в данном направлении.

Здесь также можно ввести микромасштаб времени, а именно лагранжев масштаб времени τ_L , определяемый выражением

$$\frac{1}{\tau_L^2} = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 R_L}{\partial t^2} \right]_{t=0}.$$

Если воспользоваться величиной $\mathcal{J}_L$ для больших значений t ($t \gg t^*$), когда $R_L(t^*) \approx 0$ или $t \gg \mathcal{J}_L$, то из соотношения (1.77) получим

$$\overline{y_2^2}(t) \approx 2v_2'^2 \mathcal{J}_L t,$$

или

$$y_2' \approx v_2' \sqrt{2\mathcal{J}_L t}. \quad (1.80)$$

В этом случае диффузия пропорциональна квадратному корню из времени.

Для этих продолжительных интервалов времени можно ввести коэффициент вихревой диффузии, определяемый формулой, сходной с (1.72):

$$\epsilon = \frac{\overline{y_2^2}(t)}{2t} = v_2'^2 \mathcal{J}_L = v_2'^2 \int_0^{t^*} R_L(\tau) d\tau = v_2'^2 \int_0^{\infty} R_L(\tau) d\tau. \quad (1.81)$$

Здесь использован тот факт, что $R_L(t) \approx 0$ при $t > t^*$.

Это соотношение может быть записано также следующим образом:

$$\epsilon = v_2' \Lambda_L. \quad (1.82)$$

где

$$\Lambda_L = v'_2 \mathcal{J}_L = v'_2 \int_0^{\infty} R_L(\tau) d\tau. \quad (1.83)$$

Величину Λ_L можно интерпретировать как некоторый пространственный масштаб, при котором движение частицы происходит существенно только в одном направлении.

Поскольку величина Λ_L играет роль меры вихревой диффузии, ее часто называют масштабом вихревой диффузии. В последнем соотношении интенсивность турбулентных пульсаций частиц v'_2 , вследствие предположения об однородности течения, можно положить равной u'_2 .

Здесь снова возникает вопрос о существовании связи между лагранжевыми и эйлеровыми корреляциями. В случае изотропного или даже однородного турбулентного течения можно ожидать, что между этими величинами действительно имеется определенная связь. Однако найти ее из чисто теоретических соображений пока еще не удалось. Как будет показано ниже, известные соответствующие эмпирические соотношения свидетельствуют о том, что порядок величин Λ_L и Λ_f приблизительно одинаков.

Выражение для величины ϵ , определяемое формулой (1.81), было бы справедливо также и для эффективного коэффициента турбулентного переноса субстанции Γ , если бы на пути движения частицы отсутствовал обмен этой субстанцией между частицей и окружающей жидкостью. Однако поскольку изолированная частица, рассматриваемая в турбулентном потоке, состоит из большого комплекса молекул, то обмен, по крайней мере молекулярный, всегда будет происходить. Интенсивность этого обмена будет различна в зависимости от того, что является транспортабельной субстанцией — импульс, тепло или вещество. Следует ожидать, что, чем выше интенсивность обмена, тем скорее транспортабельная субстанция частицы будет уравниваться с субстанцией в окружающей среде и тем меньше будет величина ϵ .

Если α представляет собой некоторый коэффициент обмена, то можно ожидать, что для величины $(\Lambda_L)_\gamma$ существует выражение вида

$$(\Lambda_L)_\gamma = v'_2 \int_0^{\infty} f(\alpha, \tau) R_L(\tau) d\tau,$$

где функция $f(\alpha, \tau)$ учитывает влияние обмена на протяжении пути частицы. Следовательно,

$$\epsilon(\alpha) = v'^2_2 \int_0^{\infty} f(\alpha, \tau) R_L(\tau) d\tau.$$

§ 1.10. Сводка корреляций

В предыдущих параграфах мы ввели различного рода корреляции. Для читателя может оказаться удобным свести их воедино.

Эйлеровы пространственные корреляции

Двойные корреляции между какой-либо компонентой скорости и давлением или другой скалярной величиной. Тензор первого ранга:

$$K_{A, B} = \overline{(u_a)_A p_B} = (K_{l, p})_{A, B} e_{ai}, \quad K_{A, B} = \overline{(u_a)_A \gamma_B} = (K_{l, \gamma})_{A, B} e_{ai},$$

$$(K_{l, p})_{A, B} = \overline{(u_i)_A p_B}, \quad (K_{l, \gamma})_{A, B} = \overline{(u_i)_A \gamma_B}.$$

Коэффициент корреляции:

$$(L_{l, p})_{A, B} = \frac{(K_{l, p})_{A, B}}{(u'_i)_A}.$$

(Суммирование не производится.)

Особый случай, когда $A \equiv B$:

$$K_{i, \gamma}(0) = \overline{\gamma u_i} = -\epsilon_{\gamma} \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial x_i}.$$

Мера «вихревого» переноса.

Двойные корреляции между двумя компонентами скорости (см. рис. 1.13). Тензор второго ранга:

$$Q_{A, B} = \overline{(u_a)_A (u_b)_B} = (Q_{l, j})_{A, B} e_{ai} e_{bj}, \quad (Q_{l, j})_{A, B} = \overline{(u_i)_A (u_j)_B}.$$

Коэффициент корреляции:

$$(R_{l, j})_{A, B} = \frac{\overline{(u_i)_A (u_j)_B}}{(u'_i)_A (u'_j)_B}.$$

Особый случай, когда $A \equiv B$:

$$Q_{i, j}(0) = \overline{u_i u_j} = -(\epsilon_m)_{ik} \left(\frac{\partial \bar{U}_k}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_k} \right).$$

Мера турбулентных напряжений, вихревая «вязкость» или коэффициент вихревого переноса импульса.

Изотропная однородная турбулентность (см. рис. 1.14):

Коэффициент продольной корреляции:

$$f(r) = \frac{\overline{(u_r)_A (u_r)_B}}{u'^2}.$$

Коэффициент поперечной корреляции:

$$g(r) = \frac{\overline{(u_n)_A (u_n)_B}}{u'^2}.$$

Интегральный масштаб:

$$\Lambda_f = \int_0^\infty f(r) dr, \quad \Lambda_g = \int_0^\infty g(r) dr.$$

Микромасштаб или масштаб диссипации:

$$\lambda_f \text{ определяется из соотношения } \frac{1}{\lambda_f^2} = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right]_{r=0},$$

$$\lambda_g \text{ определяется из соотношения } \frac{1}{\lambda_g^2} = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} \right]_{r=0}.$$

Тройные корреляции между компонентами скорости. Тензор третьего ранга:

$$(S_{ik,j})_{A,B} = \overline{(u_i)_A (u_k)_A (u_j)_B}.$$

Коэффициент корреляции:

$$(T_{ik,j})_{A,B} = \frac{\overline{(u_i)_A (u_k)_A (u_j)_B}}{\overline{(u'_i)_A (u'_k)_A (u'_j)_B}}.$$

Изотропная однородная турбулентность (см. рис. 1.15):

$$k(r) = T_{rr,r} = \frac{\overline{(u_r)_A^2 (u_r)_B}}{u'^3}, \quad h(r) = T_{nn,r} = \frac{\overline{(u_n)_A^2 (u_r)_B}}{u'^3},$$

$$g(r) = T_{nr,n} = \frac{\overline{(u_n)_A (u_r)_A (u_n)_B}}{u'^3}.$$

Эйлерова временная корреляция

$$R_E(t) = \frac{\overline{u(\tau) u(\tau-t)}}{u'^2} \text{ для скорости } u \text{ в фиксированной точке.}$$

Стационарное течение; осреднение по времени:

Эйлеров интегральный масштаб времени:

$$\mathcal{T}_E = \int_0^\infty R_E dt.$$

Эйлеров микромасштаб времени:

$$\tau_E \text{ определяется из соотношения } \frac{1}{\tau_E^2} = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 R_E}{\partial t^2} \right]_{t=0}.$$

Если течение обладает равномерной осредненной скоростью $\bar{U}$, такой, что $\bar{U} \gg u$, то, поскольку $x = \bar{U}t$, между $\mathcal{J}_E$ и Λ_f существует простая связь:

$$\Lambda_f = \bar{U} \mathcal{J}_E$$

и

$$f(x) \equiv R_E(t).$$

Лагранжева временная корреляция

$$R_L(t) = \frac{v(\tau) v(\tau - t)}{v'^2} \quad \begin{array}{l} \text{для компонент скорости жидкой частицы.} \\ \text{Однородное течение. Осреднение по большому} \\ \text{числу частиц.} \end{array}$$

Лагранжев или диффузионно-интегральный масштаб времени:

$$\mathcal{J}_L = \int_0^\infty R_L dt.$$

Лагранжев микромасштаб времени:

$$\tau_L \text{ определяется из соотношения } \frac{1}{\tau_L^2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 R_L}{\partial t^2} \right)_{t=0}.$$

Лагранжев или диффузионно-интегральный масштаб длины:

$$\Lambda_L = v' \mathcal{J}_L.$$

Коэффициент вихревой диффузии для жидких частиц:

$$\epsilon = v' \Lambda_L = v'^2 \int_0^\infty R_L dt.$$

Аналогично для переноса субстанции Γ жидкими частицами:

$$\epsilon_\Gamma(\alpha) = v'^2 \int_0^\infty f(\alpha, t) R_L(t) dt,$$

где функция $f(\alpha, t)$ учитывает влияние обмена на пути частиц.

§ 1.11. Эмпирические формулы для двойных корреляций

Учитывая важность коэффициента корреляции для изучения турбулентного течения, было бы очень удобно, если бы корреляционную кривую удалось аналитически описать подходящей формулой. Известно, что при однородной турбулентности функция двойной корреляции симметрична, а соответствующая ей кривая вблизи

вершины имеет параболическую форму. Однако, за исключением этих скудных сведений, теоретические представления о точной форме других участков этой кривой в общем случае турбулентного течения крайне ограничены. Несколько лет назад Карману [20] удалось теоретическим путем получить формулу для двух коэффициентов корреляции $f(r)$ и $g(r)$ в случае изотропного турбулентного потока при больших числах Рейнольдса. Бэтчелором [21], хотя и в незамкнутой форме, было получено решение, с помощью которого можно аналитически определить формулу кривых для функций $f(r)$ и $g(r)$ опять-таки в случае изотропного турбулентного потока, но при меньших числах Рейнольдса. Для еще меньших чисел Рейнольдса, при которых вязкость оказывает на турбулентное движение доминирующее влияние, для этих коэффициентов корреляции можно вывести весьма простую формулу. Мы вернемся к теоретическому анализу корреляций ниже, в главе 3. Эти теории, как и экспериментальные факты, показывают, что для коэффициентов корреляции не существует какой-либо универсальной формулы, а в зависимости от типа, условий и стадии турбулентного течения должны применяться различные соотношения.

Поскольку в настоящее время эти формулы известны лишь для нескольких ограниченных случаев и, более того, они в своем большинстве являются очень сложными, то пока, по-видимому, остается пользоваться эмпирическими формулами, приближенно описывающими корреляционные кривые, которые соответствуют различным типам, условиям и стадиям турбулентности.

Во многих случаях, особенно при больших числах Рейнольдса, форму таких кривых можно приближенно описать с помощью экспоненциальной функции. Применительно к экспериментальным корреляционным кривым для изотропного турбулентного потока за решетками попытки в этом направлении делались Драйденом [22] и его сотрудниками. Они обнаружили, что

$$g(x_2) = \exp\left(-\frac{x_2}{\Delta_g}\right). \quad (1.84)$$

Такое же выражение было получено Калинске и Пяном [23] для коэффициента лагранжевой корреляции $R_L(t)$. Тэйлор в своей работе по диффузии при непрерывных движениях [18] также использовал подобную экспоненциальную функцию для лагранжевой временной корреляции. Для этого вида лагранжевой корреляции расчеты, проведенные Доубом [24] применительно к броуновскому движению, говорят в пользу предположения об экспоненциальной кривой. Доуб пришел к выводу о том, что корреляции, соответствующие этому движению, являются экспоненциальными функциями.

Однако легко заметить, что, хотя экспоненциальная функция, определяемая формулой (1.84), и удовлетворительно описывает в общих

чертах форму корреляционной кривой, выбор ее нельзя считать правильным по следующим причинам: 1) эта функция не является параболической в своей вершине; 2) эта функция существенно положительна при всех значениях своего аргумента, в то время как, по крайней мере в случае корреляции g , действительная кривая для больших расстояний между рассматриваемыми точками должна иметь отрицательные значения.

Однако не считаясь с приведенными выше соображениями, примем, что подобная экспоненциальная функция все же справедлива; в таком случае ею будет очень удобно пользоваться при дальнейшем теоретическом анализе. Рассмотрим, например, выражение (1.76) для диффузии жидких частиц, в которое введем функцию

$$R_L(t) = \exp\left(-\frac{t}{\mathcal{T}_L}\right).$$

Эта функция удовлетворяет соотношению (1.79). Тогда имеем

$$\bar{y}_2^2(t) = 2v_2'^2 \int_0^t dt' \int_0^{t'} \exp\left(-\frac{\tau}{\mathcal{T}_L}\right) d\tau = 2v_2'^2 \mathcal{T}_L^2 \left\{ \frac{t}{\mathcal{T}_L} - \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\mathcal{T}_L}\right) \right] \right\}.$$

Это выражение, как и полученное раньше, ясно показывает, что для коротких интервалов времени диффузия прямо пропорциональна времени, а для продолжительных периодов — квадратному корню из времени.

Мы уже говорили о том, что экспоненциальная функция (1.84) не удовлетворяет свойствам действительной корреляционной функции, особенно в окрестности ее вершины. В поисках каких-либо других функций можно задаться вопросом: не существует ли определенного минимума требований, накладываемых действительными корреляционными функциями, которым должны удовлетворять искомые нами функции? И в самом деле, число подобных ограничений невелико. Так, например, при однородной турбулентности коэффициенты корреляции g или f должны удовлетворять по крайней мере следующим условиям:

$$\begin{aligned} -1 \leq g(x_2) \leq 1, \quad \lim_{x_2 \rightarrow \infty} g(x_2) = 0, \quad \lim_{x_2 \rightarrow 0} g(x_2) = 1, \\ \lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{dg}{dx_2} = 0; \quad \lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{d^2g}{dx_2^2} = \text{конечная величина} = -\frac{2}{\lambda_g^2}. \end{aligned}$$

Проверим, как выполняются эти условия в случае функции более общего вида

$$g(x_2) = \exp(-|cx_2|^m). \quad (1.85)$$

Легко показать, что все перечисленные выше требования удовлетворяются, если $m \geq 2$. При $m = 2$ имеем

$$\left[\frac{d^2 g}{dx_2^2} \right]_{x_2=0} = -2c^2,$$

так что $c = 1/\lambda_g$. С другой стороны, согласно определению Λ_g по формуле (1.56), величина c связана с интегральным масштабом Λ_g соотношением

$$c = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \frac{1}{\Lambda_g} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\Lambda_g} \approx \frac{0,88}{\Lambda_g}.$$

Отсюда в случае $m = 2$, который соответствует гауссовой кривой ошибок, отношение λ_g/Λ_g имеет постоянное значение, а именно $2/\sqrt{\pi} \approx 1,14$. Как будет показано ниже, в главе 3, подобная кривая Гаусса и в самом деле без всяких погрешностей применима к реальным корреляционным кривым, но лишь в конечной стадии периода вырождения изотропной турбулентности. Ее нельзя использовать для более ранних стадий вырождения, в которых, помимо всего, отношение λ_g/Λ_g не всегда сохраняет постоянное значение в процессе вырождения.

Френкиль [25] применил функцию (1.85) к анализу различных корреляционных кривых, которые были получены при измерениях турбулентности, генерированной с помощью сеток в аэродинамической трубе. Хотя эта функция дает удовлетворительное решение, включая и участок в окрестности вершины корреляционной кривой, только при $m \geq 2$, однако Френкиль показал, что адекватная аппроксимация всей корреляционной кривой чаще достигается при $1 < m < 2$ (в большинстве случаев ближе к 1). Отсюда можно заключить, что функция (1.85) слишком проста для описания большинства действительных корреляционных кривых.

По этой причине, а также потому, что вычисления с использованием экспоненциальной функции типа (1.85) при дробных значениях m очень трудоемки, Френкиль [26] оценил применимость других функций. Он пришел к выводу о том, что в общем случае наиболее близкое соответствие с корреляционными кривыми получается для функций следующего типа:

$$\varphi(x_2) \exp(-|cx_2|),$$

где

$$\varphi(x_2) = a_0 + \sum a_n \cos m_n c x_2$$

или

$$\varphi(x_2) = 1 + \sum a_n c^n |x_2|^m.$$

§ 1.12. Одномерный энергетический спектр по Тэйлору

В § 1.1 мы ссылались на возможность анализа кинетической энергии турбулентных пульсаций в части распределения ее по различным частотам, наблюдающимся при пульсациях. Возьмем, например, компоненту u_1 турбулентной пульсации скорости в некоторой фиксированной точке течения. Предположим, что это течение является квазистационарным, т. е. статистически однородным по времени. Тогда существует постоянное среднее значение $\overline{u_1^2}$, которое можно рассматривать как сумму составляющих по всем частотам n .

Пусть $E_1(n)dn$ представляет составляющую величины $\overline{u_1^2}$ для частот из диапазона между n и $n + dn$; тогда функция распределения $E_1(n)$ должна удовлетворять условию

$$\int_0^{\infty} E_1(n) dn = \overline{u_1^2}. \quad (1.86)$$

При рассмотрении эйлеровой временной корреляции пульсации скорости u_1 в фиксированной точке мы нашли соотношение между микромасштабом времени τ_E и формой корреляционной кривой R_E вблизи ее вершины [см. формулу (1.61)]. Время τ_E оказалось мерой наиболее быстрых изменений пульсации $u_1(t)$; на основании этого можно предположить наличие непосредственной связи между величиной τ_E и наивысшими частотами, наблюдающимися при пульсациях.

Подобная связь между формой корреляционной кривой и частотой вовсе не обязательно должна быть ограничена вершиной этой кривой и наивысшими частотами. Интегральный масштаб тоже оказался характеристикой среднего размера наибольших вихрей. Представим себе, что весь поток движется с равномерной скоростью $\bar{U}$ в направлении оси x_1 . Тогда в некоторой неподвижной точке вихри наибольших размеров будут вызывать пульсации низкой частоты, в то время как наиболее мелкие вихри приведут к высокой частоте. Если турбулентность содержит только крупные вихри, то функция распределения $E_1(n)$ будет существенна главным образом в области низких частот; если же имеются только мелкие вихри, то $E_1(n)$ будет существенна главным образом в области высоких частот. На основании этого можно ожидать, что когда кривая R_E быстро стремится к нулю, то спектр будет иметь большие значения в области высоких частот.

Связь, существующая между корреляционной и спектральной функциями, впервые была представлена в аналитическом виде Тэйлором [27]. Ниже мы дадим вывод этого соотношения, однако наш способ будет несколько отличаться от тэйлоровского.

Предположим, что пульсация скорости $u_1(t)$ может быть представлена интегралом Фурье

$$u_1(t) = 2\pi \int_0^{\infty} [a(n) \cos 2\pi nt + b(n) \sin 2\pi nt] dn, \quad (1.87)$$

где

$$a(n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(t) \cos 2\pi nt dt, \quad b(n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(t) \sin 2\pi nt dt.$$

Из теории интегралов Фурье известно [28], что интегралы $a(n)$ и $b(n)$ существуют только в том случае, когда величина $u_1(t)$ удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u_1(t)| dt = \text{конечная величина.}$$

Ввиду неизменного статистического характера турбулентности, благодаря которому среднее значение $u_1^2(t)$ является постоянной величиной, удовлетворить этому условию не представляется возможным. Чтобы преодолеть это затруднение, обычно предполагают, что длительность пульсации $u_1(t)$ конечна, т. е. величина $u_1(t)$ отлична от нуля только в диапазоне между $-T$ и $+T$. Поскольку этот интервал времени T может иметь любую наперед заданную величину при условии, что она остается конечной, это предположение с физической точки зрения фактически не представляет собой какого-либо ограничения.

Таким образом, для величин $a(n)$ и $b(n)$ мы используем следующие выражения:

$$a(n) = \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{+T} u_1(t) \cos 2\pi nt dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(t) \cos 2\pi nt dt,$$

$$b(n) = \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{+T} u_1(t) \sin 2\pi nt dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(t) \sin 2\pi nt dt,$$

поскольку при $t > T$ и $t < -T$ величина $u_1(t) = 0$.

Пользуясь теперь выражением (1.87) для $u_1(t)$, вычислим величину коэффициента корреляции

$$R_E(t) = \frac{\overline{u_1(\tau) u_1(\tau - t)}}{\overline{u_1^2}},$$

где мы должны взять среднее значение по времени в интервале, равном, по меньшей мере, $2T$. Но поскольку величина $\overline{u_1(\tau) u_1(\tau - t)}$

отлична от нуля только в интервале $2T - t$, то

$$(2T - t) \overline{u_1(\tau) u_1(\tau - t)} = \int_{-T_1}^{+T_1} u_1(\tau) u_1(\tau - t) d\tau,$$

где $T_1 > T$.

Подстановка выражения (1.87) вместо $u_1(t)$ дает

$$\begin{aligned} \overline{u_1(\tau) u_1(\tau - t)} &= \frac{1}{2T - t} \int_{-T_1}^{+T_1} u_1(\tau) u_1(\tau - t) d\tau = \\ &= \frac{4\pi^2}{2T - t} \int_{-T_1}^{+T_1} d\tau \int_0^\infty dn \int_0^\infty [a(n) \cos 2\pi n\tau + b(n) \sin 2\pi n\tau] \times \\ &\quad \times [a(m) \cos 2\pi m(\tau - t) + b(m) \sin 2\pi m(\tau - t)] dm. \end{aligned}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \int_{-T_1}^{+T_1} \cos 2\pi n\tau \cos 2\pi m(\tau - t) d\tau &= \cos 2\pi mt \int_{-T_1}^{+T_1} \cos 2\pi n\tau \cos 2\pi m\tau d\tau + \\ &+ \sin 2\pi mt \int_{-T_1}^{+T_1} \cos 2\pi n\tau \sin 2\pi m\tau d\tau = \\ &= \cos 2\pi mt \left[\frac{\sin 2\pi(n - m)T_1}{2\pi(n - m)} + \frac{\sin 2\pi(n + m)T_1}{2\pi(n + m)} \right]. \end{aligned}$$

Аналогичным путем получаем

$$\begin{aligned} \int_{-T_1}^{+T_1} \sin 2\pi n\tau \sin 2\pi m(\tau - t) d\tau &= \\ &= \cos 2\pi mt \left[\frac{\sin 2\pi(n - m)T_1}{2\pi(n - m)} - \frac{\sin 2\pi(n + m)T_1}{2\pi(n + m)} \right], \\ \int_{-T_1}^{+T_1} \cos 2\pi n\tau \sin 2\pi m(\tau - t) d\tau &= \\ &= -\sin 2\pi mt \left[\frac{\sin 2\pi(n - m)T_1}{2\pi(n - m)} + \frac{\sin 2\pi(n + m)T_1}{2\pi(n + m)} \right], \\ \int_{-T_1}^{+T_1} \sin 2\pi n\tau \cos 2\pi m(\tau - t) d\tau &= \\ &= \sin 2\pi mt \left[\frac{\sin 2\pi(n - m)T_1}{2\pi(n - m)} - \frac{\sin 2\pi(n + m)T_1}{2\pi(n + m)} \right]. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \overline{u_1(\tau) u_1(\tau - t)} &= \\ &= \frac{4\pi^2}{2T-t} \int_0^\infty dn \int_0^\infty \left\{ a(n) a(m) \cos 2\pi mt \left[\frac{\sin 2\pi(n-m) T_1}{2\pi(n-m)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\sin 2\pi(n+m) T_1}{2\pi(n+m)} \right] - \right. \\ &\quad - a(n) b(m) \sin 2\pi mt \left[\frac{\sin 2\pi(n-m) T_1}{2\pi(n-m)} + \frac{\sin 2\pi(n+m) T_1}{2\pi(n+m)} \right] + \\ &\quad + a(m) b(n) \sin 2\pi mt \left[\frac{\sin 2\pi(n-m) T_1}{2\pi(n-m)} - \frac{\sin 2\pi(n+m) T_1}{2\pi(n+m)} \right] + \\ &\quad \left. + b(n) b(m) \cos 2\pi mt \left[\frac{\sin 2\pi(n-m) T_1}{2\pi(n-m)} - \frac{\sin 2\pi(n+m) T_1}{2\pi(n+m)} \right] \right\} dm. \end{aligned}$$

Следующий шаг состоит в интегрировании по n :

$$\int_0^\infty a(n) \frac{\sin 2\pi(n-m) T_1}{2\pi(n-m)} dn = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi m T_1}^\infty \frac{\sin z}{z} a\left(m + \frac{z}{2\pi T_1}\right) dz,$$

где $z = 2\pi(n-m) T_1$.

Предположим теперь, что T_1 неограниченно возрастает; тогда этот интеграл приводится к хорошо известному интегралу Дирихле:

$$\lim_{T_1 \rightarrow \infty} \int_0^\infty a(n) \frac{\sin 2\pi(n-m) T_1}{2\pi(n-m)} dn = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin z}{z} a(m) dz = \frac{1}{2} a(m).$$

Аналогично

$$\lim_{T_1 \rightarrow \infty} \int_0^\infty a(n) \frac{\sin 2\pi(n+m) T_1}{2\pi(n+m)} dn = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \int_{2\pi m T_1}^\infty \frac{\sin z}{z} a\left(\frac{z}{2\pi T_1} - m\right) dz = 0.$$

Выполняя тем же способом интегрирование остальных выражений, получаем следующее окончательное выражение для коэффициента корреляции:

$$\overline{u_1(\tau) u_1(\tau - t)} = \frac{4\pi^2}{2T-t} \int_0^\infty \frac{a^2(m) + b^2(m)}{2} \cos 2\pi mt dm,$$

откуда при $t = 0$ имеем

$$\overline{u_1^2} = \pi^2 \int_0^\infty \frac{a^2(m) + b^2(m)}{T} dm = \int_0^\infty E_1(m) dm.$$

Нам известно, что при больших значениях t корреляция $R_E(t)$ стремится к нулю, но, с другой стороны, мы можем выбрать для T намного большее значение, нежели любая величина t , для которой $R_E(t)$ существует. Таким образом, всегда имеется возможность выбрать настолько большое значение T , что $t/T \ll 1$. Тогда выражение для корреляции можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \overline{u_1(\tau) u_1(\tau - t)} &= \pi^2 \int_0^\infty \frac{a^2(m) + b^2(m)}{T} \cos 2\pi m t \, dm = \\ &= \int_0^\infty E_1(m) \cos 2\pi m t \, dm \end{aligned}$$

или

$$R_E(t) = \frac{1}{u_1^2} \int_0^\infty E_1(n) \cos 2\pi n t \, dn. \quad (1.88)$$

Чтобы выразить $E_1(n)$ через $R_E(t)$, умножим обе части соотношения (1.88) на $\cos 2\pi m t$ и проинтегрируем полученные выражения по t в пределах от $-T_1$ до $+T_1$. Интегрирование производится абсолютно тем же способом, что и выше. Имеем

$$\begin{aligned} \overline{u_1^2} \int_{-T_1}^{+T_1} R_E(t) \cos 2\pi m t \, dt &= \\ &= \int_{-T_1}^{+T_1} dt \int_0^\infty E_1(n) \cos 2\pi m t \cos 2\pi n t \, dn = \\ &= \int_0^\infty E_1(n) \, dn \int_{-T_1}^{+T_1} \cos 2\pi m t \cos 2\pi n t \, dt = \\ &= \int_0^\infty E_1(n) \left[\frac{\sin 2\pi (n-m) t}{4\pi (n-m)} + \frac{\sin 2\pi (n+m) t}{4\pi (n+m)} \right]_{-T_1}^{+T_1} dn = \\ &= \int_0^\infty E_1(n) \left[\frac{\sin 2\pi (n-m) T_1}{2\pi (n-m)} + \frac{\sin 2\pi (n+m) T_1}{2\pi (n+m)} \right] dn = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi m T_1}^\infty \frac{\sin z}{z} E_1\left(m + \frac{z}{2\pi T_1}\right) dz + \frac{1}{2\pi} \int_{+2\pi m T_1}^\infty \frac{\sin z}{z} E_1\left(\frac{z}{2\pi T_1} - m\right) dz. \end{aligned}$$

При $T_1 \rightarrow \infty$ получается

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin z}{z} E_1(m) dz = \frac{1}{2} E_1(m).$$

Отсюда

$$E_1(m) = 2\bar{u}_1^2 \int_{-\infty}^{+\infty} R_E(t) \cos 2\pi m t dt = 4\bar{u}_1^2 \int_0^{\infty} R_E(t) \cos 2\pi m t dt. \quad (1.89)$$

Таким образом, из соотношений (1.88) и (1.89) следует, что величины $R_E(t)$ и $E_1(m)$ представляют собой преобразования Фурье; этот факт впервые был установлен Тэйлором.

Если положить, что турбулентное течение имеет равномерную среднюю скорость $\bar{U}$ в направлении оси x_1 и что значение $\bar{U}$ велико по сравнению с турбулентными пульсациями скорости, а следовательно, можно пользоваться приближенной связью между временем t и расстоянием x_1 по формуле (1.65), а также если принять во внимание идентичность $f(x_1)$ и $R_E(t)$, то из уравнений (1.88) и (1.89) получим

$$f(x_1) = \frac{1}{\bar{u}_1^2} \int_0^{\infty} E_1(n) \cos \frac{2\pi n x_1}{\bar{U}} dn, \quad (1.90)$$

$$E_1(n) = \frac{4\bar{u}_1^2}{\bar{U}} \int_0^{\infty} f(x_1) \cos \frac{2\pi n x_1}{\bar{U}} dx_1. \quad (1.91)$$

Из только что приведенных соотношений между $R_E(t)$ или $f(x_1)$ и $E_1(n)$ можно получить следующие интересные результаты:

1. Найдем в формулах (1.89) и (1.91) пределы при $n \rightarrow 0$:

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{\bar{u}_1^2} E_1(n) = 4 \int_0^{\infty} R_E(t) dt = 4 \mathcal{J}_E, \quad (1.92)$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{\bar{u}_1^2} E_1(n) = \frac{4}{\bar{U}} \int_0^{\infty} f(x_1) dx_1 = \frac{4}{\bar{U}} \Lambda_f. \quad (1.93)$$

Эти равенства показывают, что интегральные масштабы $\mathcal{J}_E$ и Λ_f можно найти по пересечению кривой $[E_1(n), n]$ с осью $E_1(n)$. Этот факт дает способ определения этих масштабов.

2. Согласно соотношению (1.61), с учетом (1.88) имеем

$$\frac{1}{\tau_E^2} = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 R_E}{\partial t^2} \right]_{t=0} = \frac{2\pi^2}{\bar{u}_1^2} \int_0^{\infty} n^2 E_1(n) dn,$$

и аналогично

$$\frac{1}{\lambda_f^2} = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \right]_{x_1=0} = \frac{2\pi^2}{U^2 u_1^2} \int_0^\infty n^2 E_1(n) dn. \quad (1.94)$$

Эти результаты вновь указывают на то, что размер микровихрей, который характеризуется микромасштабами τ_E и λ_f , соответствует главным образом величине $E_1(n)$ для больших значений частоты n .

Анализ экспериментальных кривых корреляции f показывает, что их общее очертание, исключая кривизну вблизи вершины кривой функции f , не зависит от скорости $\bar{U}$. Отсюда на основании (1.91) можно было бы сделать вывод, что величина $\bar{U}E_1(n)$ зависит только от $n/\bar{U}$. Это, однако, справедливо лишь для относительно низких значений n . Ибо если бы величина $\bar{U}E_1(n)$ была функцией только $n/\bar{U}$, то этим же свойством, согласно (1.94), обладал бы и микромасштаб λ_f . Но этот вывод не подтверждается опытом, который, наоборот, свидетельствует о том, что λ_f уменьшается с возрастанием $\bar{U}$. Отсюда вытекает, что при больших значениях n , при которых величина λ_f определяется в основном функцией $E_1(n)$, величина $\bar{U}E_1(n)$ непременно должна зависеть как от $n/\bar{U}$, так и от $\bar{U}$. Более тщательный анализ экспериментальных кривых $E_1(n)$ при больших значениях n показывает, что это так и есть на самом деле [29].

Поскольку функции $E_1(n)$ и $f(x_1)$ оказались преобразованиями Фурье, то одна из них может быть найдена по другой при помощи интегрирования, аналитического или графического. Естественно, ее можно определить аналитически только в том случае, если известно аналитическое выражение подынтегральной функции. Но если такого теоретического соотношения не имеется, то можно попытаться аппроксимировать кривые $f(x_1)$ каким-либо эмпирическим уравнением или сделать ту же попытку в отношении кривых $E_1(n)$.

С теоретической стороны все это вполне законно; поэтому было бы весьма привлекательно иметь возможность обойтись измерением лишь одной из этих двух функций. Однако в действительности существующие методы экспериментального определения спектральных функций, как, впрочем, и корреляционных функций, все еще приводят к значительным погрешностям. Вообще говоря, измерение корреляционной функции осуществляется более точно, когда расстояние между двумя рассматриваемыми точками не слишком мало, а большая точность при измерении спектральных функций достигается в диапазоне более высоких частот. Таким образом, дальнейшее аналитическое исследование, при котором используется, например, спектральная функция, целиком полученная интегрированием экспериментальной корреляционной кривой, является довольно рискованным.

На наш взгляд, соотношение между спектральной и корреляционной функциями целесообразнее рассматривать просто как удобное средство проверки результатов экспериментального определения каждой из них.

Тем не менее интересно посмотреть, какое выражение получается для спектральной функции при аппроксимации корреляционной кривой экспонентой вида $\exp(-x_1/\Lambda_f)$.

Подстановка этого выражения для $f(x_1)$ в интеграл (1.91) дает

$$\frac{1}{u_1^2} E_1(n) = \frac{4}{U} \int_0^\infty \cos \frac{2\pi n x_1}{U} \exp\left(-\frac{x_1}{\Lambda_f}\right) dx_1 = \frac{4}{U} \frac{\Lambda_f}{1 + \left(\frac{4\pi^2 n^2}{U^2}\right) \Lambda_f^2},$$

или

$$\frac{\bar{U} E_1(n)}{4u_1^2 \Lambda_f} = \frac{1}{1 + \left(\frac{4\pi^2 n^2}{U^2}\right) \Lambda_f^2}. \quad (1.95)$$

И именно в той мере, в какой функция $\exp(-x_1/\Lambda_f)$ является удовлетворительной аппроксимацией формы многообразия кривых $f(x_1)$, уравнение (1.95) оказывается в удовлетворительном соответствии с экспериментально определенными спектральными кривыми, за исключением, конечно, того участка кривой $E_1(n)$, который принадлежит диапазону высоких значений n . Когда n стремится к нулю, величина

$$\frac{\bar{U} E_1(n)}{u_1^2 \Lambda_f} = 4$$

весьма удовлетворительно согласуется с опытными данными, полученными посредством экстраполяции того участка кривой $E_1(n)$, для которого имеются экспериментальные зависимости [29].

Представление о степени этой аппроксимации можно получить по рис. 1.18, заимствованному из работы Фавр [39]. Условия, при которых производились измерения, те же, что и для измерений, показанных на рис. 1.17. Спектральное распределение продольной компоненты турбулентных пульсаций определялось двумя путями, а именно: непосредственным измерением и при помощи вычислений по соответствующей корреляционной кривой.

Аналогично могут быть рассмотрены и компоненты $u_2(t)$ и $u_3(t)$ турбулентной пульсации скорости в некоторой фиксированной точке. Кроме того, по соответствующим эйлеровым временным корреляциям можно определить преобразования Фурье $E_2(n)$ и $E_3(n)$. Если снова воспользоваться предположением, что течение обладает в направлении оси x_1 скоростью $\bar{U}$ и, следовательно, $x_1 = \bar{U}t$, то эйлеровы пространственные корреляции величин $u_2(t)$ и $u_3(t)$ в направлении оси x_1 оказываются корреляциями $g(x_1)$, которые в случае

изотропной турбулентности одинаковы для u_2 и u_3 . Следовательно, их преобразования Фурье $E_2(n)$ и $E_3(n)$ также будут одинаковы.

Далее, вместо двух точек, расположенных на оси x_1 , рассмотрим две произвольные точки течения. Выше уже было показано, что

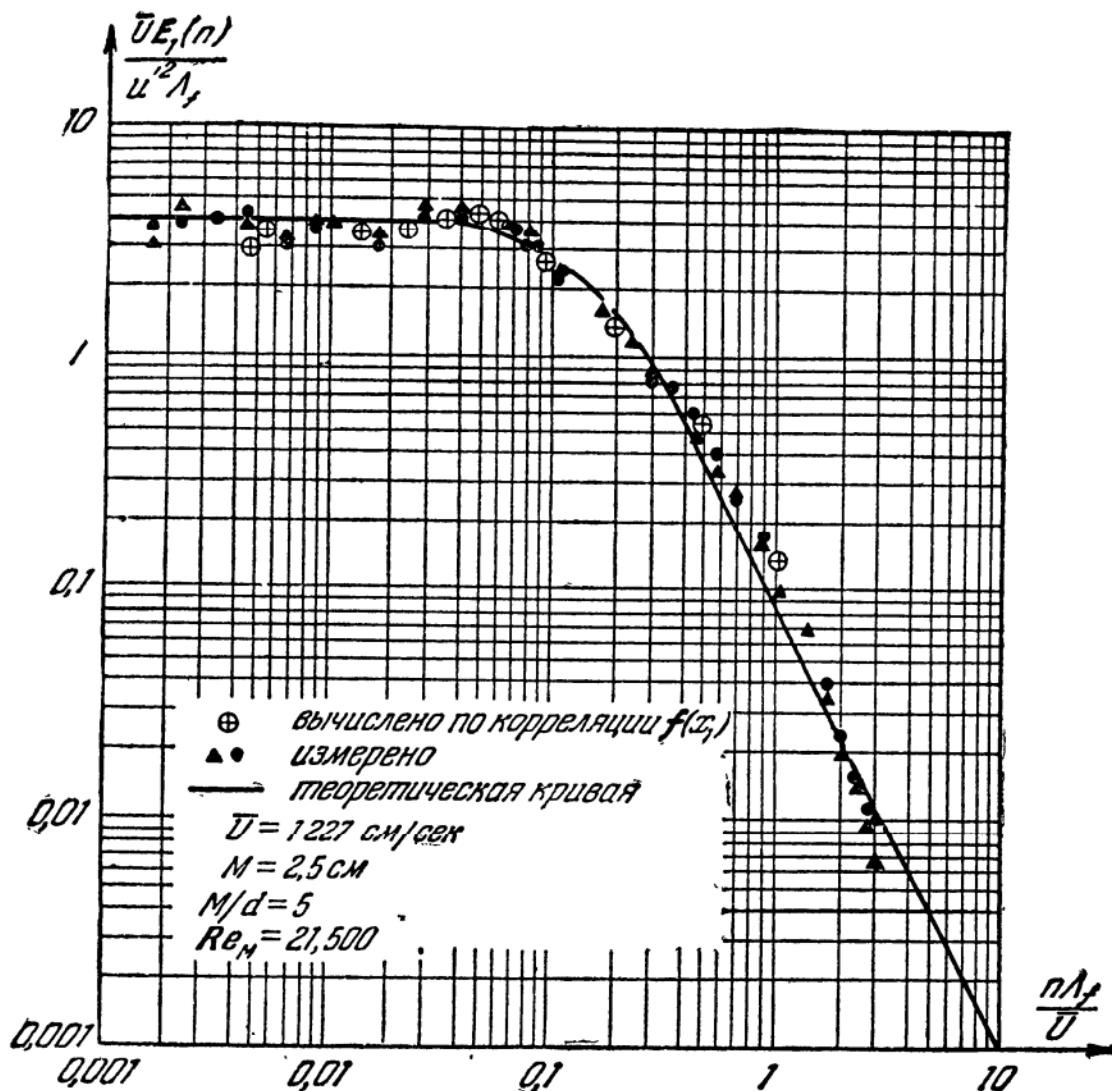


Рис. 1.18. Спектральное распределение $E_1(n)$ продольной компоненты турбулентных пульсаций скорости [39].

корреляция между пульсациями скорости в двух таких точках может быть описана корреляционным тензором $(R_{ij})_{A,B}$. Девяти компонентам этого тензора соответствуют девять спектральных функций, которые образуют компоненты спектрального тензора. Каждая компонента этого тензора является преобразованием Фурье соответствующей компоненты корреляционного тензора.

К этому вопросу мы вновь возвратимся в главе 3. Там будет показано, что спектральная функция Тэйлора фактически предста-

влетает собой одномерное сечение трехмерной спектральной функции. Трехмерная спектральная функция — это не то же самое, что упоминавшийся выше спектральный тензор, но на самом деле тесно связана с ним.

В этой связи можно упомянуть о работе Кампе де Ферье [30], которая основана на свойствах спектрального тензора. Кампе де Ферье показал, что операции со спектральным тензором обладают в математическом отношении преимуществом над операциями с корреляционным тензором. Одно из этих преимуществ с физической точки зрения состоит в том, что интересующие нас соотношения можно вывести, не прибегая к ограничительному предположению об изотропности; при этом достаточно потребовать лишь, чтобы поле было однородным.

§ 1.13. Энергетические соотношения для турбулентного течения

Рассмотрим теперь энергетические соотношения для турбулентного потока несжимаемой жидкости. Известно, что турбулентное течение реальной жидкости по своей природе является диссипативным. Вследствие этой диссипации энергии для поддержания турбулентности требуется непрерывный подвод энергии. В то же время благодаря этому турбулентному движению происходит диффузия жидких частиц вместе с их кинетической энергией. Таким образом, в среднем стационарное состояние наблюдается только в том случае, когда между энергией, подведенной к турбулентному движению, и диффузией и диссипацией энергии турбулентности существует равновесие.

В нестационарном состоянии этого равновесия не наблюдается и любой избыток энергии должен быть равен изменению энергии турбулентности.

Поскольку динамика потока может быть, в принципе, описана с помощью уравнений движения, то наш анализ, по-видимому, можно начать с рассмотрения уравнений (1.14) в предположении о постоянстве коэффициента вязкости и об отсутствии внешних сил, т. е. именно для того случая, который мы и собираемся изучить. Тогда, умножая обе части этих уравнений на U_i и суммируя по индексу i , после некоторых преобразований получаем уравнение энергии. Это уравнение содержит различные члены, каждый из которых имеет определенный физический смысл. Однако смысл некоторых из этих членов не всегда ясен. Поэтому мы дадим вывод уравнения энергии иным способом, который позволяет понять смысл всех членов более отчетливо.

Рассмотрим работу, производимую напряжениями σ_{ij} на единицу массы в единицу времени при деформации движущейся жидкости. Эта работа $\mathcal{W}$ на единицу массы в единицу времени выражается

следующим образом:

$$\mathcal{W} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \sigma_{11} U_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \sigma_{21} U_1 + \frac{\partial}{\partial x_3} \sigma_{31} U_1 + \right. \\ \left. + \text{то же для } U_2 \text{ и } U_3 \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \sigma_{ij} U_j. \quad (1.96)$$

Но

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \sigma_{ij} U_j = U_j \frac{\partial}{\partial x_i} \sigma_{ij} + \sigma_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial x_i}.$$

Далее, согласно второму закону Ньютона, имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \sigma_{ij} = \rho \frac{dU_j}{dt},$$

следовательно,

$$U_j \frac{\partial}{\partial x_i} \sigma_{ij} = \rho U_j \frac{dU_j}{dt} = \frac{1}{2} \rho \frac{d}{dt} U_j U_j,$$

что как раз и обозначает изменение кинетической энергии жидких частиц.

Второй член в выражении для $\mathcal{W}$, а именно $\sigma_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial x_i}$, характеризует работу деформации, которая должна быть равна диссипации на единицу массы.

Для несжимаемой жидкости из уравнения (1.8) получаем

$$\sigma_{ij} = -P \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right).$$

Отсюда

$$\mathcal{W} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \sigma_{ij} U_j = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} U_j U_j - \frac{P}{\rho} \delta_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \nu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_j}{\partial x_i} = \\ = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} U_j U_j + \nu \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial U_j}{\partial x_i},$$

поскольку в случае несжимаемой жидкости $\delta_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} = \frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0$.

Таким образом, мы еще раз убеждаемся, что первый член в правой части этого соотношения означает изменение кинетической энергии жидких частиц на единицу массы в единицу времени, а второй член — диссипацию на единицу массы.

Записанное выше выражение для σ_{ij} тоже можно подставить прямо в соотношение (1.96):

$$\mathcal{W} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \sigma_{ij} U_j = \frac{\partial}{\partial x_i} U_j \left[-P \delta_{ij} + \nu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] = \\ = - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{P}{\rho} U_i + \nu \frac{\partial}{\partial x_i} U_j \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right).$$

Здесь первый и второй члены в правой части означают работу на единицу массы в единицу времени, произведенную соответственно гидростатическим давлением и вязкими напряжениями.

Приравнявая друг другу записанные выше выражения для $\mathcal{W}^\circ$, получаем уравнение энергии:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} U_j U_j &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} U_j U_j + \frac{1}{2} U_k \frac{\partial}{\partial x_k} U_j U_j = \\ &= - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{P}{\rho} U_i + \nu \frac{\partial}{\partial x_i} U_j \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \nu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \end{aligned}$$

или, учитывая что для несжимаемой жидкости $U_k \frac{\partial}{\partial x_k} U_j U_j = \frac{\partial}{\partial x_k} U_k U_j U_j$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} U_j U_j &= - \frac{\partial}{\partial x_i} U_i \left(\frac{P}{\rho} + \frac{U_j U_j}{2} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial x_i} U_j \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \\ &\quad - \nu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_j}{\partial x_i}. \quad (1.97) \end{aligned}$$

Согласно тому, что было сказано выше, первый член в правой части этого уравнения можно интерпретировать как работу, произведенную полным давлением $P + (\rho/2) U_j U_j$ на единицу массы в единицу времени. Но этот член можно еще рассматривать и как изменение переноса полной энергии $(P/\rho) + (1/2) U_j U_j$ на единицу массы посредством конвекции со скоростью U_i .

Таким образом, физический смысл различных членов уравнения энергии (1.97) состоит в следующем:

- I — локальное изменение кинетической энергии на единицу массы в единицу времени;
- II — изменение конвективного переноса полной энергии на единицу массы в единицу времени, или работа, произведенная полным динамическим напором на единицу массы в единицу времени;
- III — работа, совершенная вязкими напряжениями на единицу массы в единицу времени;
- IV — диссипация на единицу массы.

Уравнение энергии (1.97) применимо к любому типу течения несжимаемой жидкости с постоянным коэффициентом вязкости. Для того чтобы наглядно продемонстрировать роль турбулентного движения, воспользуемся известным способом разделения каждой величины на ее осредненную и пульсационную составляющие:

$$\begin{aligned} U_i &= \bar{U}_i + u_i, \quad P = \bar{P} + p, \\ U_i U_i &= \bar{U}_i \bar{U}_i + 2\bar{U}_i u_i + u_i u_i = \bar{U}_i \bar{U}_i + 2\bar{U}_i u_i + q^2. \end{aligned}$$

Подстановка этих выражений в уравнение (1.97) и осреднение по времени дает

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \bar{U}_j \bar{U}_j + \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{q}^2}{\partial t} = & - \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{U}_i \left(\frac{\bar{P}}{\rho} + \frac{1}{2} \bar{U}_j \bar{U}_j \right) + \\ & + \nu \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{U}_j \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) - \nu \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} - \\ & - \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{u}_i \left(\frac{\bar{P}}{\rho} + \frac{1}{2} \bar{q}^2 \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{U}_j \overline{u_i u_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{U}_i \bar{q}^2 + \\ & + \nu \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{u}_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Умножая уравнение движения (1.17) на $\bar{U}_i$ (величины F_i предполагаются равными нулю), получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \bar{U}_j \bar{U}_j = & - \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{U}_i \left(\frac{\bar{P}}{\rho} + \frac{1}{2} \bar{U}_j \bar{U}_j \right) + \nu \bar{U}_i \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \bar{U}_i - \\ & - \bar{U}_i \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i u_j} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{U}_i \left(\frac{\bar{P}}{\rho} + \frac{1}{2} \bar{U}_j \bar{U}_j \right) + \\ & + \nu \bar{U}_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) - \bar{U}_i \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i u_j}. \end{aligned}$$

Почленное вычитание этого уравнения из предыдущего дает

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{q}^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{U}_i \bar{q}^2 = & - \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u_i \left(\frac{p}{\rho} + \frac{q^2}{2} \right)} - \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{U}_j \overline{u_i u_j} + \\ & + \bar{U}_j \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u_i u_j} + \nu \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{u}_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\bar{q}^2}{2} = & \underbrace{- \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u_i \left(\frac{p}{\rho} + \frac{q^2}{2} \right)}}_{\text{II}} - \underbrace{\overline{u_i u_j} \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i}}_{\text{III}} + \underbrace{\nu \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{u}_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}_{\text{IV}} - \\ & - \underbrace{\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_i}}_{\text{V}}. \quad (1.98) \end{aligned}$$

Итак, мы получили уравнение энергии турбулентности, согласно которому изменение (I) кинетической энергии турбулентности на единицу массы жидкости равняется (II) конвективной диффузии (вследствие турбулентности) полной энергии турбулентности плюс (III) энергия, перенесенная от осредненного потока под действием турбулентных напряжений сдвига, или порождение энергии турбулентности плюс (IV) работа, совершенная вязкими напряжениями сдвига при турбулентном движении на единицу массы в единицу времени, плюс (V) диссипация при турбулентном движении на единицу массы.

Два вязких члена в уравнении (1.98) часто записывают в несколько отличной форме, а именно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)} - \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_i}} = \\ = \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{q^2} - \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}} - \overline{\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}} = \\ = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \overline{q^2} - \overline{\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}}, \end{aligned}$$

поскольку для несжимаемой жидкости $\overline{u_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j}} = 0$. Тогда уравнение (1.98) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\overline{q^2}}{2} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u_i \left(\frac{p}{\rho} + \frac{q^2}{2} \right)} - \overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i} + \\ + \frac{1}{2} \nu \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \overline{q^2} - \nu \overline{\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}}. \quad (1.99) \end{aligned}$$

Следует заметить, что оба вязких члена в уравнении (1.99) имеют уже не тот смысл, как соответствующие члены (IV и V) в уравнении (1.98); так, последний член в уравнении (1.99) не является диссипативным, как член V в уравнении (1.98) [38]. Этот последний член соответствует диссипации лишь в случае однородной турбулентности.

Из анализа уравнения энергии турбулентности можно сделать следующие интересные выводы.

Рассмотрим поток, скорость которого возрастает в направлении оси x_1 , т. е. $\frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_1} > 0$. Тогда член уравнения (1.98) или (1.99), соответствующий этому осредненному движению, а именно $-\overline{u_1^2} \frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_1}$,

имеет отрицательный знак. И наоборот, если $\frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_1} < 0$, то энергия турбулентности будет иметь тенденцию к повышению. Отсюда вытекает следующее правило. В потоке с положительным градиентом скорости в направлении течения (ускоряющийся пространственный поток) наблюдается тенденция к уменьшению относительной интенсивности турбулентности; в потоке с отрицательным градиентом скорости (замедляющийся пространственный поток) наблюдается тенденция к повышению интенсивности турбулентности.

Поскольку в общем случае возрастание скорости связано с уменьшением статического давления и наоборот, то вышесказанное можно сформулировать также следующим образом. При уменьшении статического давления в направлении течения интенсивность турбулентности понижается, а увеличение статического давления способствует

повышению интенсивности турбулентности при условии, что градиенты давления не обусловлены воздействием трения.

До сих пор мы рассматривали только неограниченное течение. Возьмем теперь случай, в котором течение ограничено твердыми стенками. Тогда скорость потока на этих границах должна быть равна нулю. Отсюда следует, что если уравнение (1.98) проинтегрировать по всей области течения, то члены II и IV обратятся на границах в нуль (математически это непосредственно вытекает из теоремы Гаусса). Это значит, что влияние конвективной диффузии и работы вязких напряжений сдвига при турбулентном движении в обинтегрированном уравнении исчезает.

Пусть

$$\mathcal{E}_t = \frac{1}{2} \rho \int \int \int \bar{q}^2 dx_1 dx_2 dx_3$$

является полной кинетической энергией турбулентности во всей ограниченной области.

Поскольку

$$\begin{aligned} \rho \int \int \int \frac{d}{dt} \bar{q}^2 dx_1 dx_2 dx_3 &= \rho \int \int \int \left(\frac{\partial}{\partial t} \bar{q}^2 + \bar{U}_i \frac{\partial \bar{q}^2}{\partial x_i} \right) dx_1 dx_2 dx_3 = \\ &= \rho \int \int \int \frac{\partial}{\partial t} \bar{q}^2 dx_1 dx_2 dx_3 = \rho \frac{d}{dt} \int \int \int \bar{q}^2 dx_1 dx_2 dx_3 = 2 \frac{d\mathcal{E}_t}{dt}, \end{aligned}$$

то уравнение (1.98) после интегрирования запишется так:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}_t}{dt} &= - \rho \int \int \int \left(\overline{u_i u_j} \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) dx_1 dx_2 dx_3 - \\ &- \rho \int \int \int \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_1 dx_2 dx_3. \quad (1.100) \end{aligned}$$

Здесь второй член в правой части уравнения (диссипативный член) всегда положителен. Первый член может быть либо положительным, либо отрицательным. Если первый член является отрицательным, а его абсолютная величина больше второго члена, то производная $d\mathcal{E}_t/dt$ может стать положительной.

Уравнение (1.100) было получено Рейнольдсом и Лорентцем [31]. Оно использовалось в качестве исходного соотношения при вычислении критического значения числа Рейнольдса, ниже которого любое возмущение подавляется под действием диссипации. Рассмотрим, например, ламинарное течение вязкой жидкости и предположим, что на основное вязкое движение наложено малое возмущение. Если для этого возмущения выбрать подходящее аналитическое выражение, то оба члена в правой части уравнения (1.100) могут быть вычислены. Если это вычисление покажет, что второй член больше первого, то

возмущение затухает, и течение остается ламинарным. Если, наоборот, энергия, переданная возмущению основным движением, больше диссипации, то возмущение в результате будет нарастать, а ламинарное течение станет неустойчивым и будет наблюдаться переход его в турбулентное течение. В предельном случае $d\mathcal{E}_t/dt = 0$; следовательно, отношение двух членов в правой части уравнения (1.100) в точности равно единице. Исходя из предположения о виде возмущения, можно произвести оценку турбулентных членов уравнения (1.100). При увеличении скорости осредненного потока $\bar{U}_i$ градиент скорости $\partial \bar{U}_i / \partial x_j$ возрастает. При определенной величине этого градиента, т. е. при определенном значении $\bar{U}_i$, а значит и при определенном числе Рейнольдса, производная $d\mathcal{E}_t/dt$ обращается в нуль и число Рейнольдса достигает критического значения. Это показывает, почему переход от ламинарного течения к турбулентному происходит при увеличении скорости основного движения выше некоторого критического значения. Лорентц вычислил этим способом критическое число Рейнольдса для потока в цилиндрической трубе. То же самое было сделано Орром [32], который определил это критическое число также и для течения Куэтта. Самим же Рейнольдсом были произведены расчеты для напорного течения между параллельными стенками. Все эти вычисления дают в результате критические значения числа Рейнольдса, которые оказываются существенно ниже экспериментальных значений. Так, Рейнольдсом для напорного течения между параллельными стенками (удаленными друг от друга на расстояние h) было получено критическое число Рейнольдса $\bar{U}_{cr} h / \nu = 516$, в то время как опыты дали величину, заключенную между 1100 и 1200. Для течения Куэтта Лорентц получил $U_0 h / \nu = 288$, тогда как по измерениям Куэтта эта критическая величина составляет 1900.

Может возникнуть вопрос, правильно ли отправляться от интегральной формы уравнения энергии. Известно, например, что в реальных потоках турбулентность зарождается более или менее локально. Поэтому в качестве отправной точки при расчете локальной неустойчивости основного потока по отношению к определенным возмущениям следует использовать значительно более сложное уравнение (1.98) или (1.99).

В связи с этим можно отметить, что современные исследования устойчивости ламинарного пограничного слоя и т. п. основываются не на уравнениях энергии (1.98) или (1.99), а на уравнениях движения. Предыдущий метод, который связан с именем Рейнольдса, часто называют методом баланса энергии; второй метод обычно называется методом возмущений. Рэлей [33] также рассматривал переход к турбулентности как локальное явление; он показал, что течение является неустойчивым, если профиль скорости имеет точку перегиба.

Теории, основанные на методе возмущений и подтвержденные многими экспериментальными исследованиями, показали, что, в случае неустойчивости первоначально ламинарного течения по отношению к синусоидальным возмущениям определенного типа, амплитуда синусоидальных волн возрастает вниз по потоку. Хотя еще и не совсем ясно, каким образом изолированная волна непременно перерастает в полностью турбулентное течение, тем не менее это определенно связано с нелинейным характером уравнений движения. Нелинейные члены этих уравнений обуславливают взаимодействие между движениями с различной частотой, так что кинетическая энергия переносится от движений с более низкой частотой к движениям с более высокой частотой. Другими словами, влияние нелинейных членов в уравнениях движения сводится к увеличению амплитуды движений с более высокой частотой. Указанием на это может служить теоретическое исследование Бюргерса [34] по упрощенной модели турбулентного течения.

Последние исследования [40, 41] показывают, что перерастание этих синусоидальных волн в турбулентность происходит через образование очагов турбулентности из-за вторичной неустойчивости течения. Эти турбулентные очаги, аналогично акустическим возмущениям в сверхзвуковом потоке, растут и распространяются в направлении вниз по течению до тех пор, пока все поле течения не станет турбулентным. Кроме того, имеются указания на то, что вторичные волны образуют более или менее упорядоченную систему вихрей с осями, расположенными вдоль вогнутых искривленных линий тока, подобно пространственным вихрям, которые, как показал Гертлер [42], наблюдаются в потоке вдоль вогнутой поверхности.

Характерной особенностью перехода к турбулентности является его внезапное возникновение: относительно слабые и медленные возмущения за очень короткий промежуток времени превращаются в очаг турбулентности высокой интенсивности и широкого спектра. Этот очаг быстро растет не только в осевом, но также и в поперечном направлении, параллельно стенке, что указывает на пространственный характер турбулентности в очаге. Это происходит даже в том случае, когда исходное возмущение является плоским.

Можно упомянуть также об интересных результатах, полученных Линем [43] и Линдгреном [44]. Линь показал, что влияние вязкости вблизи стенки приводит к смещению по фазе между осевой компонентой скорости u_1 и нормальной компонентой скорости u_2 плоского возмущения, а стало быть, к положительной величине турбулентного напряжения сдвига — $\rho \overline{u_1 u_2}$. Поскольку вблизи стенки $\partial \bar{U}_1 / \partial x_2 > 0$, то член III в уравнении (1.98), характеризующий порождение энергии турбулентности, имеет положительную величину. Этот результат согласуется с выводом, к которому пришел Линдгрэн на основании своих опытов по явлению перехода при течении в трубе, а именно:

«турбулентность должна возникать под влиянием стенки, распространяющимся на возмущенный поток в непосредственной близости от ограничивающих стенок или в точках соприкосновения с ними».

Еще одной проблемой, которая при исследовании турбулентности нами до сих пор не рассматривалась, но тоже тесно связана с нелинейным характером уравнений движения, является механизм поддержания турбулентности. Все теории, за исключением разработанной Бюргерсом [34] и несколькими другими авторами, основаны на линеаризации уравнений движения. Подобные теории в состоянии объяснить тенденцию течения к турбулентности, но совершенно непригодны для объяснения существования турбулентности. Мунк [35] сделал попытку визуализировать механизм турбулентности, что могло бы послужить основой для теоретических работ, ведущих к этому объяснению. Он исходил из представления о том, что турбулентность является существенно пространственным движением, при котором хаотично распределенные вихревые кольца вращаются, вытягиваются или сплющиваются, накапливаются и диффундируют. Более крупные и сильные вихри образуются путем слияния, но в то же время вихревые кольца распадаются на более мелкие, интенсивность которых уменьшается затем под действием вязкости или диффузии. В этом отношении можно сослаться также на упоминавшиеся выше результаты Линя и Линдгрена, касающиеся влияния стенки не только на возбуждение, но и на самоподдержание турбулентности вблизи стенки.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ К ГЛАВЕ 1

- c — скорость звука; скорость молекулярного движения.
- D — коэффициент молекулярной диффузии.
- D_{ij} — тензор скоростей деформации.
- d — диаметр цилиндра или стержня.
- E — спектральная функция кинетической энергии турбулентности.
- e_{ij} — направляющие косинусы.
- F — сила; движущая сила.
- f — коэффициент пространственной продольной корреляции скорости.
- g — коэффициент пространственной поперечной корреляции скорости.
- h — коэффициент пространственной тройной корреляции скорости.
- K_i — корреляционный тензор первого ранга.
- k — коэффициент пространственной тройной корреляции скорости.

- L_i — коэффициент корреляционного тензора первого ранга.
 l — средняя длина свободного пробега молекул.
 M — размер ячейки.
 N — нормаль к плоскости.
 n — частота; число молекул.
 P — статическое давление; $\bar{P}$ — осредненная по времени величина; p — турбулентная пульсация статического давления.
 $\bar{P}_t$ — осредненная по времени величина турбулентного «давления».
 P — вероятность.
 Q_{ij} — тензор корреляции скорости второго ранга.
 q — коэффициент пространственной тройной корреляции скорости.
 q^2 — $u_i u_i$ — удвоенная энергия турбулентности; $\bar{q}^2$ — осредненная по времени величина.
 R_{ij} — коэффициент тензора корреляции скорости второго ранга.
 R_E — коэффициент эйлеровой временной корреляции.
 R_L — коэффициент лагранжевой временной корреляции.
 r — цилиндрическая полярная координата в радиальном направлении.
 $S_{i, kj}$ или $S_{ik, j}$ — корреляционный тензор третьего ранга.
 T — период времени.
 $T_{i, kj}$ или $T_{ik, j}$ — коэффициент корреляционного тензора третьего ранга.
 t — время.
 U — эйлерова скорость; $\bar{U}$ — осредненная по времени величина.
 u — компонента турбулентных пульсаций; $u' = \sqrt{\overline{u^2}}$ — корень квадратный из среднеквадратичной величины компоненты турбулентной пульсации скорости; индексы 1, 2, 3, i, j, k относятся к декартовой системе координат, n — к нормальной компоненте, r, φ, z — к цилиндрической полярной системе координат.
 v — лагранжева турбулентная пульсация скорости; $v' = \sqrt{\overline{v^2}}$.
 x_i, x_1, x_2, x_3 — эйлеровы координаты в декартовой системе.
 y_i, y_1, y_2, y_3 — лагранжевы координаты в декартовой системе.
 z — цилиндрическая полярная координата в осевом направлении.

- α — коэффициент обмена.
 ∂ — оператор частной производной.
 δ_{ij} — символ Кронекера.
 ϵ_{ijk} — антисимметричный единичный тензор.
 ϵ — коэффициент вихревой диффузии; ϵ_n — то же для импульса; ϵ_γ — то же для скалярной субстанции.
 $\mathcal{E}_t$ — полная кинетическая энергия турбулентности в конечном объеме.
 φ — цилиндрическая полярная координата в угловом направлении.
 Γ — скалярная субстанция; $\bar{\Gamma}$ — осредненная по времени величина.
 γ — турбулентная пульсация скалярной субстанции.
 $\mathcal{I}_E$ — эйлеров интегральный масштаб времени.
 $\mathcal{I}_L$ — лагранжев интегральный масштаб времени.
 $\mathfrak{J}$ — поток через единицу площади.
 κ — c_p/c_v — отношение удельных теплоемкостей.
 $\mathfrak{k}$ — коэффициент молекулярного переноса.
 Λ — пространственный интегральный масштаб; Λ_f — продольный интегральный масштаб; Λ_g — поперечный интегральный масштаб.
 Λ_L — лагранжев интегральный масштаб длины.
 λ — пространственный микромасштаб.
 μ — динамический коэффициент вязкости.
 ν — кинематический коэффициент вязкости.
 ∇^2 — оператор Лапласа $\partial^2/\partial x_i \partial x_i$.
 Ω_k — завихренность.
 π — 3,14159...
 ρ — плотность; $\bar{\rho}$ — осредненная по времени величина; $\tilde{\rho}$ — турбулентная пульсация.
 σ_{ij} — тензор напряжений.
 τ — время.
 τ_E — эйлеров микромасштаб времени.
 τ_L — лагранжев микромасштаб времени.
 Θ — дилатация.
 $\mathcal{W}^\circ$ — работа на единицу массы в единицу времени.
 $\Xi_i, \Xi_1, \Xi_2, \Xi_3$ — эйлеровы координаты в декартовой системе.
 $\xi_i, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ — эйлеровы координаты в декартовой системе.

ГЛАВА 2

ПРИНЦИПЫ МЕТОДОВ И ПРИБОРОВ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЙ В ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОТОКАХ

§ 2.1. Введение

При экспериментальных исследованиях течения жидкости было разработано и использовалось большое количество методов, приборов и аппаратуры; поэтому среди них в настоящее время имеется широкий выбор, причем для измерений какого-либо специального типа одни подходят больше, чем другие. Большинство из этих методов и приборов предназначено для измерения скорости в потоках, которые либо являются, либо считаются нетурбулентными; фактически лишь некоторые из них пригодны для надежных измерений в турбулентных потоках или, в более узком смысле, для измерений самой турбулентности.

Основные затруднения при измерении турбулентности вызываются тем, что турбулентность представляет собой хаотичный, пульсирующий поток и носит трехмерный характер. Более того, высокая частота пульсаций, представляющих для нас интерес в турбулентных потоках, создает большие трудности при выборе измерительного прибора в смысле всестороннего удовлетворения основного требования, которое предъявляется к подобным приборам, а именно, чтобы регистрация величины, подлежащей измерению, была свободна, насколько это возможно, от искажения.

При измерении турбулентных потоков следует проводить различие между измерениями осредненного потока и измерениями собственно турбулентности. Проблемы, связанные с этими двумя типами измерений, до некоторой степени взаимосвязаны, однако требования, которым должны удовлетворять соответствующие методы и приборы, являются различными. Например, результаты измерения осредненной скорости в данной точке в большей или меньшей степени зависят от турбулентности потока и при этом необходимо знать поправку, которую следует внести в показания измерительного прибора. Однако при измерении собственно турбулентности нельзя допустить какого-либо влияния осредненной скорости, которое наверняка будет

служить источником ошибок в зарегистрированных турбулентных пульсациях скорости.

В этой главе мы рассмотрим прежде всего принципы измерения собственно турбулентности, а позднее методы измерения осредненных величин. Может показаться странным, почему не выбран обратный порядок изложения, поскольку это представляется более логичным. Ответ на этот вопрос состоит в том, что проблемы, связанные с измерением осредненного потока, будут более понятными, если мы хорошо познакомимся с проблемами, встречающимися при измерении турбулентности. Кроме того, на большинство из современных методов измерения осредненных величин влияет турбулентность; поэтому в экспериментальные данные приходится вносить поправки. Эти поправки могут быть сделаны лишь в том случае, если параметры турбулентности известны; значит, в дополнение к этим осредненным параметрам необходимо измерять величины, характеризующие турбулентность.

Различные методы, аппаратуру и приборы можно, вообще говоря, разделить на две группы.

В первой группе методов используются трассирующие частицы или какой-либо другой индикатор, который вводится в жидкость с тем, чтобы сделать картину течения поддающейся либо визуальному наблюдению (фотографическая регистрация), либо регистрации с помощью чувствительного прибора, расположенного вне поля течения.

Во второй группе методов чувствительный элемент вводится непосредственно в движущуюся жидкость, а характеристики турбулентности определяются по изменениям механических, физических или химических свойств этого элемента.

Когда для измерения величин, характеризующих турбулентность, применяются методы первой группы, то мы сразу же сталкиваемся с трудностями, связанными с очень быстрыми изменениями во времени и пространстве, что приводит к необходимости практически мгновенной регистрации, чаще всего в течение очень коротких интервалов времени. Более того, пространственный характер турбулентных движений отнюдь не упрощает интерпретацию этих показаний, а, наоборот, усложняет ее.

Что касается второй группы, то для того, чтобы измерение турбулентности было надежным, чувствительный элемент и остальная часть измерительной аппаратуры должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Чувствительный элемент, введенный в движущееся поле, должен быть настолько мал, чтобы вызываемое им возмущение картины течения было минимально допустимым.

2. Мгновенное распределение скорости в области, занятой этим элементом, должно быть равномерным. Это означает, что чувствительный элемент по своим размерам должен быть меньше микромасштаба

турбулентности. Если измерения ограничены потоками малой или умеренной скорости, то размеры чувствительного элемента не должны превышать, скажем, 1 мм.

3. Прибор должен обладать настолько малой инерционностью, чтобы его реакция даже на наиболее быстрые пульсации была практически мгновенной. При не слишком больших скоростях потока можно ожидать пульсаций с частотой вплоть до 5000 сек^{-1} .

4. Прибор должен быть достаточно чувствительным, чтобы регистрировать малые различия в пульсациях; эти различия чаще всего составляют всего лишь несколько процентов от среднего значения.

5. Прибор должен быть стабильным, чтобы в течение по меньшей мере одного испытания не происходило заметных изменений параметров его тарировочной кривой.

6. Прибор должен быть достаточно прочным и достаточно жестким, чтобы не происходило вибраций или движений под действием турбулентного потока.

В соответствии с этими требованиями обычная трубка полного напора, или трубка Пито, которая столь успешно применяется при измерениях в нетурбулентных потоках, оказывается полностью непригодной для измерения турбулентности (за исключением, по всей вероятности, турбулентности очень большого масштаба и очень низкой частоты, которая могла бы иметься, например, в атмосфере) главным образом вследствие чрезвычайно высокой инерционности; тем не менее при измерениях часто пользуются тонкой трубкой, соединенной с прибором-преобразователем, чувствительным к давлению.

Имеется всего лишь один прибор, который по своей разработке и применению для измерений в турбулентных потоках намного превосшел другие приборы, в том числе и современные, это — термоанемометр. Причину его популярности при измерениях турбулентности легко понять, если учесть, что это — единственный прибор, который вполне удовлетворяет всем вышеперечисленным требованиям, хотя, конечно, и имеет свои ограничения.

Поскольку термоанемометр с нагретой нитью вплоть до наших дней является наиболее важным прибором для измерения турбулентности, то читатель поймет, почему непропорционально большая часть этой главы посвящена описанию (все же довольно ограниченному) именно этого прибора и связанных с ним методов измерения различных характеристик турбулентности, таких, как интенсивность, корреляция, интегральный масштаб, микромасштаб и т. д. В связи с тем, что основная цель этой главы — ознакомить читателя, хотя бы до некоторой степени, с различными методами измерения и присущими им особенностями и, таким образом, дать ему возможность критически рассматривать и интерпретировать эмпирические данные, мы ограничимся рассмотрением только принципиальных вопросов, не вникая в технические подробности конструкции приборов. Читатель не

должен надеяться получить полное описание измерительной аппаратуры, которое он может найти в специальных учебниках по этому предмету. Так, мы не будем рассматривать ни детали конструкции собственно термоанемометра, ни его электронного оборудования, ибо это увело бы нас далеко от цели нашей книги.

§ 2.2. Термоанемометр

Чувствительный элемент термоанемометра представляет собой очень тонкую короткую металлическую нить, которая нагревается электрическим током. Нить охлаждается протекающей жидкостью, что вызывает падение ее температуры и, следовательно, уменьшение электрического сопротивления нити. Для измерения турбулентности в газах используются нити диаметром от 2 до 10 $\mu\text{м}$. Материалами, из которых изготавливаются нити, обычно являются платина, сплав платины с иридием и вольфрам.

Полное количество переносимого тепла зависит от следующих факторов:

- 1) скорости потока,
- 2) разницы температур нити и жидкости,
- 3) физических свойств жидкости,
- 4) размеров и физических свойств нити.

Обычно факторы (2) и (4) являются известными. Если фактор (3) известен или сохраняется постоянным, то можно измерить величину (1), или если (1) известен или постоянен, то можно измерить (3).

Нить охлаждается благодаря теплопроводности, свободной и вынужденной конвекции и излучению. Вообще говоря, влиянием излучения обычно пренебрегают; влиянием свободной конвекции также можно пренебречь.

Поскольку термоанемометр используется в большинстве случаев для измерений в воздушных потоках, мы ограничимся здесь применением его именно в этих условиях. В § 2.7 будет рассмотрено использование термоанемометра для измерения турбулентности в капельных жидкостях.

Если пренебречь пока каким-либо влиянием сжимаемости, то теплообмен цилиндра с обтекающим его газом можно описать при помощи безразмерных критериев Нуссельта (Nu), Прандтля (Pr), Грасгофа (Gr) и Рейнольдса (Re):

$$Nu = \frac{\alpha d}{\kappa_g}, \quad Pr = \frac{c_p \mu_g}{\kappa_g}, \quad Gr = \frac{g \rho_g^2 d^3 \beta \Delta \theta}{\mu_g^2}, \quad Re = \frac{\rho_g U d}{\mu_g},$$

где α — коэффициент теплоотдачи, κ_g — коэффициент теплопроводности газа при температуре θ_g , μ_g — абсолютный коэффициент вязкости газа при температуре θ_g , c_p — удельная теплоемкость газа при постоянном

давлении, β — коэффициент объемного расширения газа, ρ_g — плотность газа при температуре Θ_g , g — ускорение земного тяготения, $\Delta\Theta$ — разность температур цилиндра и газа, U — скорость газа, d — диаметр цилиндра.

Для случая, когда влиянием свободной конвекции можно пренебречь, многими исследователями были собраны данные о теплообмене цилиндра с газом или жидкостью, движущимися перпендикулярно к оси цилиндра. Наиболее важные результаты приводятся в книге Мак-Адамса [1]. Крамерсом [2] было предложено следующее эмпирическое соотношение, которое дает весьма удовлетворительные результаты для многих газов и жидкостей:

$$Nu = 0,42Pr^{0,2} + 0,57Pr^{0,33}Re^{0,50}. \quad (2.1)$$

Для воздуха и двухатомных газов справедливость этого соотношения доказана в диапазоне

$$0,01 < Re < 10\,000.$$

Содержащиеся в безразмерных критериях величины, характеризующие свойства газа, отнесены к «пленочной температуре»

$$\Theta_f = \frac{\Theta_w + \Theta_g}{2} = \Theta_g + \frac{\Delta\Theta}{2}, \quad (2.2)$$

где Θ_g — температура газа, а Θ_w — температура нити.

Для воздуха при $\Delta\Theta = 100^\circ\text{C}$ имеем $(\mu/\rho)_f \approx 0,20 \text{ см}^2/\text{сек}$; поэтому величина Ud должна находиться в диапазоне

$$0,002 < Ud < 2000 \text{ см}^2/\text{сек}.$$

При измерении турбулентности обычно применяются нити с диаметрами от 2 до 7 $\mu\text{к}$. Выбрав в качестве средней величины диаметр нити в 5 $\mu\text{к}$, получим интервал скоростей, в котором можно воспользоваться соотношением (2.1):

$$4 < U < 4 \cdot 10^6 \text{ см/сек}.$$

Эти пределы охватывают все случаи практического применения термоанемометра.

Может возникнуть вопрос, вправе ли мы игнорировать влияние свободной конвекции и излучения на теплообмен. Опыты показывают, что влияние свободной конвекции зависит главным образом от величины комплекса $Gr \cdot Pr$. Согласно измерениям Ван дер Хегге Цийпена [35] в диапазоне $Re > 0,5$, этим эффектом можно пренебречь, если

$$Gr \cdot Pr = \frac{gc_p \rho_f^2 \beta_f d^3 \Delta\Theta}{\mu_f \kappa_f} < 10^{-4}.$$

В случае воздуха при диаметре нити 5 мк величина $Gr \cdot Pr$ имеет порядок 10^{-6} , т. е. лежит намного ниже указанного предельного значения.

Влияние излучения на теплообмен с окружающим воздухом в обычных условиях, когда температура нити не превышает 300°C , оказывается пренебрежимо малым.

Количество тепла, переносимого в единицу времени от нити длиной l с равномерно распределенной температурой к окружающему газу, равно

$$\alpha \pi dl (\Theta_w - \Theta_g)$$

или, если заменить величину α по соотношению (2.1),

$$\pi \kappa_f l (\Theta_w - \Theta_g) [0,42 (Pr)_f^{0,20} + 0,57 (Pr)_f^{0,33} (Re)_f^{0,50}].$$

Индекс f соответствует значению, взятому при пленочной температуре.

При условии теплового равновесия потери тепла в единицу времени должны равняться количеству тепла, выделяемого в единицу времени электрическим током, проходящим через нить; иначе говоря, их величина составляет $I^2 R_w$, где I — сила электрического тока, а R_w — полное электрическое сопротивление нити.

Таким образом, для теплового равновесия нити требуется, чтобы

$$I^2 R_w = \epsilon \pi \kappa_f l (\Theta_w - \Theta_g) [0,42 (Pr)_f^{0,20} + 0,57 (Pr)_f^{0,33} (Re)_f^{0,50}]. \quad (2.3)$$

Здесь ϵ — коэффициент преобразования. Обычно левая часть этого уравнения выражается в *дж/сек*, а правая часть — в *кал/сек*; в этом случае $\epsilon = 4,2$. Величины, которые характеризуют свойства газа и содержатся в правой части этого уравнения, зависят от Θ_f , т. е. от Θ_g и $(\Theta_w - \Theta_g)$. Они обычно порождают эффекты второго порядка, к которым мы вернемся несколько позже.

Влияние температурной зависимости электрического сопротивления нити имеет первый порядок, именно на этом эффекте основано применение нагретой нити как анемометра. Указанная температурная зависимость может быть выражена следующей формулой:

$$R_w = R_0 [1 + b (\Theta_w - \Theta_0) + b_1 (\Theta_w - \Theta_0)^2 + \dots], \quad (2.4)$$

где R_0 — сопротивление при характерной температуре Θ_0 , например при 273°K ; b , b_1 — температурные коэффициенты удельного электрического сопротивления нити.

При нормальных условиях работы термоанемометра квадратичный член в этой формуле можно опустить, так как величина b_1 намного меньше b . Например, для платины

$$b = 3,5 \cdot 10^{-3} (^\circ\text{C})^{-1}, \quad b_1 = -5,5 \cdot 10^{-7} (^\circ\text{C})^{-2},$$

для вольфрама

$$b = 5,2 \cdot 10^{-3} (^\circ\text{C})^{-1}, \quad b_1 = 7,0 \cdot 10^{-7} (^\circ\text{C})^{-2}.$$

Следовательно, влияние квадратичного члена в уравнении (2.4) зависит от температуры и свойств материала нити. К рассмотрению этого вопроса мы еще вернемся.

Опуская квадратичный член в (2.4), легко выразить разность температур $(\theta_w - \theta_g)$ в уравнении (2.3) через величину $(R_w - R_g)$, где R_g — электрическое сопротивление нити при температуре газа θ_g ; при этом получим

$$\theta_w - \theta_g = \frac{R_w - R_g}{bR_0}. \quad (2.5)$$

Тогда соотношение (2.3) можно записать следующим образом:

$$I^2 R_w = \frac{e\pi\kappa_f l}{b} \frac{R_w - R_g}{R_0} [0,42 (\text{Pr})_f^{0,20} + 0,57 (\text{Pr})_f^{0,33} (\text{Re})_f^{0,50}]. \quad (2.6)$$

Применительно к термоанемометрическим измерениям удобно и общепринято записывать это соотношение в форме

$$\frac{I^2 R_w}{R_w - R_g} = A + B \sqrt{U}, \quad (2.7)$$

где

$$A = 0,42 \frac{e\pi\kappa_f l}{bR_0} (\text{Pr})_f^{0,20}, \quad (2.8)$$

$$B = 0,57 \frac{e\pi\kappa_f l}{bR_0} (\text{Pr})_f^{0,33} \left(\frac{\rho_f d}{\mu_f} \right)^{0,50}. \quad (2.9)$$

В теории термоанемометрических измерений для описания процесса охлаждения нити потоком газа вначале пользовались не формулой (2.3), основанной на эмпирической зависимости Крамера (2.1), а соотношением, теоретически выведенным Кингом [3] в предположении о потенциальном обтекании нити и о том, что перенос тепла от нити не вызывает изменения условий ее обтекания:

$$I^2 R_w = e\kappa_g l (\theta_w - \theta_g) \left(1 + \sqrt{2\pi \frac{\rho_g c_p dU}{\kappa_g}} \right), \quad (2.10)$$

справедливым при

$$\frac{\rho_g c_p dU}{\kappa_g} > 0,08.$$

Отсюда для воздуха при комнатной температуре имеем $Ud > 0,015 \text{ см}^2/\text{сек}$. Для практических приложений этот предел достаточно низок. Сравнение формул (2.10) и (2.3) показывает, что единственно общее между ними — это зависимость от квадратного корня из величины dU ; при этом выражения для коэффициентов A и B существенно различны.

В практике термоанемометрических измерений коэффициенты A и B не вычисляются ни из соотношений (2.8) и (2.9), ни из соотношений, вытекающих из формулы Кинга (2.10), а определяются экспериментально. Однако «теоретические» формулы для A и B все же используются для оценки влияния свойств газа и нити на их значения. Вполне очевидно, что для этой цели желательно пользоваться наиболее надежными формулами для A и B . Поэтому здесь рекомендуются выражения (2.8) и (2.9), которые и будут использоваться нами в дальнейшем.

Экспериментальное определение коэффициентов A и B довольно просто. При постоянной температуре, т. е. при постоянном электрическом сопротивлении нити, связь между I^2 и $\sqrt{U}$, согласно (2.7), должна быть линейной. Эта линейная зависимость обычно вполне удовлетворительно подтверждается опытом. На рис. 2.1 показано,

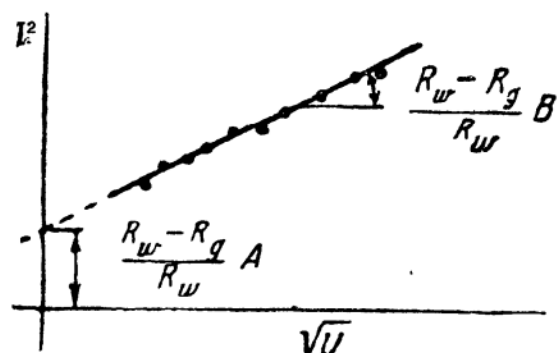


Рис. 2.1. Линейная связь между I^2 и $\sqrt{U}$ для нити термоанемометра.

как выглядит подобная эмпирическая кривая. Из пояснений, приведенных на рисунке, видно, как можно вычислить значения A и B .

Следует заметить, что эта тарировочная кривая получена для невозмущенного потока газа, интенсивность турбулентности в котором, насколько это возможно, низка. Может возникнуть вопрос, являются ли определенные таким способом значения A и B одинаковыми с теми значениями, которые будут наблюдаться в турбулентном потоке с та-

кой же средней скоростью U . Какое-либо различие между указанными значениями следует отнести за счет нелинейных эффектов, которые связаны с зависимостью величин, входящих в A и B , от температуры. Однако более подробный анализ показывает, что при нормальных рабочих условиях эти эффекты являются слабыми, и поэтому при измерении турбулентности с уверенностью можно пользоваться значениями A и B , полученными по «статической» тарировочной кривой.

Для измерения турбулентных пульсаций скорости применяются два различных метода.

В первом методе электрический ток I поддерживается постоянным; во втором методе постоянными остаются температура, а следовательно, и сопротивление. В первом случае температура, а значит, и электрическое сопротивление изменяются в зависимости от пульсационной скорости; во втором случае пульсирующей величиной является электрический ток. Нагретая нить включается в цепь моста Уитстона, как схематически изображено на рис. 2.2, где показана

также и основная электронная аппаратура. Очевидно, что эта аппаратура для каждого из двух методов существенно различна.

Со времени первых попыток применения термоанемометра для измерений турбулентности метод постоянного тока получил широкое распространение и стал довольно несложным инструментом исследования. Как будет показано ниже, метод постоянной температуры

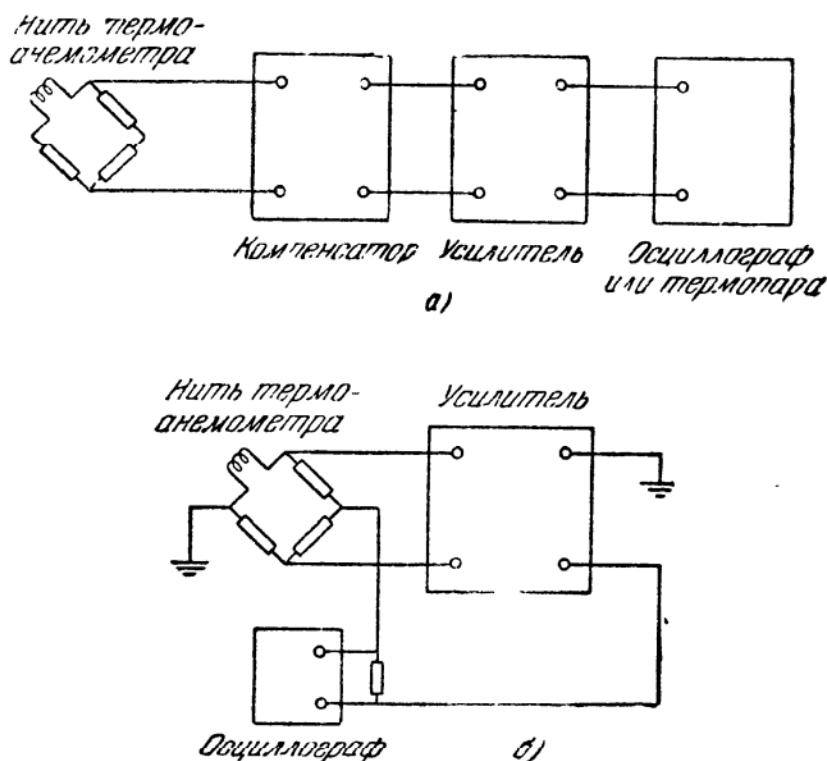


Рис. 2.2. Схемы блоков для метода постоянного тока (а) и метода постоянной температуры (б).

имеет по сравнению с методом постоянного тока принципиальные преимущества в отношении точности измерений. Однако присущая ему нестабильность системы обратной связи, необходимой для поддержания сопротивления и температуры нити постоянными, долгое время считалась почти непреодолимым препятствием. И лишь в последние годы, благодаря существенному развитию электроники, оказалось возможным создать стабильно работающие системы обратной связи, которые, однако, пока еще не достигли уровня вполне надежных и несложных в работе электронных схем, используемых в методе постоянного тока. Фактически большинство имеющейся сейчас аппаратуры работает пока по методу постоянного тока.

Исходя из этого, мы рассмотрим сначала метод постоянного тока, причем значительно подробнее, нежели метод постоянной температуры.

§ 2.3. Метод постоянного тока

Чтобы пользоваться нагретой нитью для измерения турбулентности, надо знать характеристику нагретой нити, помещенной в пульсирующий поток воздуха. Для этой цели в качестве исходного соотношения воспользуемся уравнением (2.7) и введем следующие обозначения:

$$U = \bar{U} + u, \quad R_w = \bar{R}_w + r_w.$$

Если относительную интенсивность турбулентности считать низкой, т. е.

$$\frac{u}{\bar{U}} \ll 1,$$

то можно положить также, что

$$\frac{r_w}{\bar{R}_w - R_g} \ll 1.$$

Тогда соотношение (2.7) может быть приближенно представлено формулой

$$\frac{I^2 \bar{R}_w}{\bar{R}_w - R_g} \left(1 - \frac{R_g}{\bar{R}_w - R_g} \frac{r_w}{\bar{R}_w} \right) \approx A + B \sqrt{\bar{U}} \left(1 + \frac{u}{2\bar{U}} \right)$$

или, поскольку

$$\frac{I^2 \bar{R}_w}{\bar{R}_w - R_g} = A + B \sqrt{\bar{U}},$$

формулой

$$-\frac{I^2 R_g r_w}{(\bar{R}_w - R_g)^2} \approx B \sqrt{\bar{U}} \frac{u}{2\bar{U}}.$$

Отсюда получим изменение напряжения на нити, соответствующее турбулентной пульсации скорости u :

$$e = I r_w = - \frac{(\bar{R}_w - R_g)^2}{2 I R_g} B \sqrt{\bar{U}} \frac{u}{\bar{U}}. \quad (2.11)$$

Если ввести чувствительность нити s по формуле

$$\sqrt{e^2} = s \sqrt{u^2}, \quad (2.12)$$

то s запишется как

$$s = \frac{(\bar{R}_w - R_g)^2}{2 I R_g} \frac{B \sqrt{\bar{U}}}{\bar{U}} \quad (2.13)$$

и

$$e = - s u.$$

Следовательно, если ограничиться низкой относительной интенсивностью турбулентности, то примененный выше способ линеаризации дает простую связь между напряжением e и турбулентной пульсацией скорости u . Поскольку пульсации электрического сопротивления и температуры нити остаются малыми по сравнению с их осредненными значениями, то величину A , в которую входят коэффициенты теплопроводности и вязкости воздуха, и температурный коэффициент удельного электрического сопротивления можно считать практически постоянными.

Поддерживать электрический ток I постоянным независимо от изменения электрического сопротивления можно различными способами. Самым простым и наиболее часто применяемым способом является использование последовательно соединенных больших сопротивлений.

Соотношение (2.11) между пульсациями напряжения и скорости справедливо для нити, распределения скорости и температуры вдоль которой равномерны, а влияние инерции отсутствует. Однако на практике на характеристику нити оказывают еще влияние: 1) конечная тепловая инерция нити, 2) охлаждающее воздействие крепления нити и 3) неравномерное распределение скорости вдоль нити.

Рассмотрим каждый из этих факторов в отдельности.

Влияние тепловой инерции. Уравнение (2.7) основано на предположении об идеальном равновесии между теплом, выделяющимся при прохождении электрического тока, и теплом, переносимым к движущемуся газу. Если пульсации газового потока являются очень быстрыми, то нить должна нагреваться и охлаждаться с одинаковой частотой. Это возможно только в том случае, если тепловая инерция нити бесконечно мала. Однако в действительности тепловая инерция имеет конечную величину, и благодаря этому между быстрыми пульсациями скорости газа и соответствующими пульсациями температуры нити наблюдается некоторый период запаздывания.

Если температура вдоль нити распределена равномерно, то тепловое равновесие нити в произвольный момент времени описывается следующим уравнением:

$$\begin{aligned} I^2 R_w &= (R_w - R_g)(A + B \sqrt{U}) + \rho_w c_w \frac{\pi}{4} d^2 l \frac{d\theta_w}{dt} = \\ &= (R_w - R_g)(A + B \sqrt{U}) + C_w \frac{d\theta_w}{dt}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где ρ_w — плотность материала нити, c_w — удельная теплоемкость материала нити на единицу массы; C_w — полная теплоемкость нити.

Чтобы проанализировать влияние турбулентности, предположим, что

$$U = \bar{U} + u, \quad R_w = \bar{R}_w + r_w, \quad \theta_w = \bar{\theta}_w + \theta_w.$$

Полагая относительную интенсивность турбулентности малой: $u/\bar{U} \ll 1$ и, следовательно, $r_w/\bar{R}_w \ll 1$, получаем соотношение между r_w , θ_w и u :

$$I^2 r_w = (A + B \sqrt{\bar{U}}) r_w + (\bar{R}_w - R_g) B \sqrt{\bar{U}} \frac{u}{2\bar{U}} + \epsilon C_w \frac{d\theta_w}{dt}.$$

Если пренебречь квадратичным членом, то величину θ_w можно выразить через r_w при помощи соотношения (2.5):

$$r_w = R_0 b \theta_w.$$

После этого получим

$$I^2 r_w = (A + B \sqrt{\bar{U}}) r_w + (\bar{R}_w - R_g) B \sqrt{\bar{U}} \frac{u}{2\bar{U}} + \frac{\epsilon C_w}{b R_0} \frac{dr_w}{dt},$$

или

$$\frac{dr_w}{dt} + \frac{1}{M} r_w = \varphi(t), \quad (2.15)$$

где для краткости введены обозначения:

$$\varphi(t) = - \frac{b R_0 (\bar{R}_w - R_g) B \sqrt{\bar{U}}}{\epsilon C_w} \frac{u}{2\bar{U}}, \quad (2.16)$$

$$M = \frac{\epsilon C_w}{b R_0 [-I^2 + (A + B \sqrt{\bar{U}})]}, \quad (2.17)$$

или поскольку

$$A + B \sqrt{\bar{U}} - I^2 = \frac{R_g}{\bar{R}_w - R_g} I^2,$$

то

$$M = \frac{\epsilon C_w (\bar{R}_w - R_g)}{b I^2 R_0 R_g}. \quad (2.18)$$

Решение дифференциального уравнения (2.15) имеет вид

$$r_w = \int_{-\infty}^t \varphi(\tau) \exp \left[- \left(\frac{1}{M} \right) (t - \tau) \right] d\tau. \quad (2.19)$$

Предположим, что турбулентная пульсация скорости u является простой периодической функцией при угловой частоте ω , а именно:

$$u(t) = u^* \exp(\sqrt{-1} i^* \omega t), \quad \text{где} \quad i = \sqrt{-1}.$$

Тогда

$$\varphi(t) = \varphi^* \exp[i(\omega t - \pi)]$$

и

$$\varphi^* = \frac{bR_0 (\bar{R}_w - R_g) B \sqrt{\bar{U}}}{eC_w} \frac{u^*}{2\bar{U}} = \frac{(\bar{R}_w - R_g)^2 B \sqrt{\bar{U}}}{MI^2 R_g} \frac{u^*}{2\bar{U}}.$$

В этом случае решение (2.19) запишется в виде

$$r_w = -\varphi^* M \frac{\exp(i\omega t)}{1 + i\omega M} = r_w^* \exp[i(\omega t - \psi)],$$

где

$$r_w^* = \frac{-\varphi^* M}{\sqrt{1 + \omega^2 M^2}}, \quad \psi = \arctg(-\omega M).$$

Связь между пульсацией напряжения $e = Ir_w$ и пульсацией скорости определяется формулой

$$e = -\frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 M^2}} \frac{(\bar{R}_w - R_g)^2 B \sqrt{\bar{U}}}{IR_g} \frac{u^*}{2\bar{U}} \exp[i(\omega t - \psi)].$$

Это соотношение показывает, что при абсолютно гармонических пульсациях скорости u чувствительность s , введенная по формуле (2.12), определяется выражением

$$s(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 M^2}} \frac{(\bar{R}_w - R_g)^2 B \sqrt{\bar{U}}}{2IR_g \bar{U}}, \quad (2.20)$$

которое отличается от формулы (2.13) коэффициентом

$$(1 + \omega^2 M^2)^{-1/2}.$$

Таким образом, мы видим, что чувствительность нагретой нити зависит от частоты пульсаций скорости вследствие конечной тепловой инерции нити; при этом для больших значений частоты она уменьшается. Величина частоты, выше которой ее влияние становится заметным, зависит от значения «постоянной времени» M . Чем меньше значение постоянной времени, тем выше может быть та частота пульсаций скорости, при которой характеристика нити начинает заметно искажаться.

В случае реальной турбулентности, которая складывается из многих гармоник, при оценке чувствительности необходимо учитывать вклад всех гармоник.

Из решения (2.19) следует, что

$$r_w = A \int_{-\infty}^t u(\tau) \exp\left[-\left(\frac{1}{M}\right)(t - \tau)\right] d\tau = A \int_0^{\infty} u(t - t') \exp\left(-\frac{t'}{M}\right) dt',$$

где

$$A = -\frac{bR_0 (\bar{R}_w - R_g) B \sqrt{\bar{U}}}{2eC_w \bar{U}}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\overline{e^2} &= I^2 \overline{r_w^2} = I^2 A^2 \int_0^\infty dt' \int_0^\infty \overline{u(t-t') u(t-t'')} \exp\left(-\frac{t'+t''}{M}\right) dt'' = \\ &= I^2 A^2 u'^2 \int_0^\infty dt' \int_0^\infty R_E(t''-t') \exp\left(-\frac{t'+t''}{M}\right) dt'',\end{aligned}$$

на основании чего выражение для чувствительности принимает вид

$$s = IA \left[\int_0^\infty dt' \int_0^\infty R_E(t''-t') \exp\left(-\frac{t'+t''}{M}\right) dt'' \right]^{1/2}.$$

При вычислении двойного интеграла воспользуемся методом, предложенным Бюргерсом [80]. Введем новые переменные

$$t_1 = t' + t'', \quad t_2 = t'' - t'.$$

Согласно правилу преобразования имеем

$$\begin{aligned}\int \int f(t', t'') dt' dt'' &= \int \int f(t_1, t_2) \begin{vmatrix} \frac{\partial t'}{\partial t_1} & \frac{\partial t'}{\partial t_2} \\ \frac{\partial t''}{\partial t_1} & \frac{\partial t''}{\partial t_2} \end{vmatrix} dt_1 dt_2 = \\ &= \frac{1}{2} \int \int f(t_1, t_2) dt_1 dt_2.\end{aligned}$$

Чтобы найти пределы интегрирования, соответствующие новым переменным, следует принять во внимание, что интегрирование в плоскости (t', t'') должно выполняться по всему первому квадранту ($0 \leq t' \leq \infty; 0 \leq t'' \leq \infty$), а интегрирование в плоскости (t_1, t_2) должно распространяться на область, соответствующую первому квадранту плоскости времени (t', t'') . Следовательно,

$$\int_0^\infty dt' \int_0^\infty dt'' = \frac{1}{2} \int_0^\infty dt_1 \int_{-t_1}^{+t_1} dt_2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_2 \int_{t_2}^\infty dt_1.$$

Подстановка этого выражения в интеграл, содержащийся в формуле для s , дает

$$\begin{aligned}\int_0^\infty dt' \int_0^\infty R_E(t''-t') \exp\left(-\frac{t'+t''}{M}\right) dt'' &= \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_2 \int_{t_2}^\infty R_E(t_2) \exp\left(-\frac{t_1}{M}\right) dt_1 = \\ &= \int_0^\infty dt_2 \int_{t_2}^\infty R_E(t_2) \exp\left(-\frac{t_1}{M}\right) dt_1 = M \int_0^\infty R_E(t_2) \exp\left(-\frac{t_2}{M}\right) dt_2.\end{aligned}$$

Тогда выражение для s принимает вид

$$s = \frac{bIR_0(\bar{R}_w - R_g)BV\bar{U}}{2eC_w\bar{U}} \left[M \int_0^\infty R_E(t) \exp\left(-\frac{t}{M}\right) dt \right]^{1/2}$$

или

$$s = \frac{(\bar{R}_w - R_g)^2 BV\bar{U}}{2IR_g\bar{U}} \left[\frac{1}{M} \int_0^\infty R_E(t) \exp\left(-\frac{t}{M}\right) dt \right]^{1/2}. \quad (2.21)$$

Этот результат тоже показывает, что с возрастанием постоянной времени M чувствительность уменьшается. При очень малом M , когда $\exp(-t/M)$ заметно отличается от нуля только при $t \approx 0$ и $R_E(t) \approx R_E(0) = 1$, это выражение преобразуется в (2.13); но при очень большом M , когда $\exp(-t/M) \approx 1$ в диапазоне, где $R_E(t) \neq 0$, имеем

$$s \approx \frac{(\bar{R}_w - R_g)^2 BV\bar{U}}{2IR_g\bar{U}} \sqrt{\frac{\mathcal{I}_E}{M}}.$$

Каким путем можно получить высокую чувствительность s ? Согласно формулам, выведенным для s , например (2.21), высокая чувствительность достигается в том случае, когда значение M мало, а комплекс $(\bar{R}_w - R_g)^2 \frac{B}{IR_g}$ велик.

С помощью выражений (2.7), (2.8) и (2.9) можно показать, что при заданной скорости $\bar{U}$ коэффициент $(\bar{R}_w - R_g)^2 \frac{B}{IR_g}$ зависит главным образом от величин $\frac{\bar{R}_w}{R_g}$, $\frac{R_g}{R_0}$ и lR_0d . Отсюда следует, что коэффициент $(\bar{R}_w - R_g)^2 B/IR_g$ можно сделать большим, когда значения $\bar{R}_w/R_g$ и lR_0d велики. Поскольку отношение $\bar{R}_w/R_g$ или $\bar{\Theta}_w/\Theta_g$ в силу ограниченности максимально допустимой температуры нити имеет предел, то следует указать еще и на другую возможность повышения чувствительности, связанную с величиной lR_0d . Так как $R_0 \sim l/d^2$, то $lR_0d \sim l^2/d$; следовательно, большую величину lR_0d можно получить путем уменьшения d и увеличения l .

Из выражения для M (2.18) можно сделать вывод, что при постоянном значении $\bar{R}_w/R_g$ величина M практически пропорциональна C_w , т. е. ld^2 .

Отсюда следует, что при заданных значениях осредненной скорости $\bar{U}$ и $\bar{R}_w/R_g$ или $\bar{\Theta}_w/\Theta_g$ сокращение диаметра нити приводит к значительному уменьшению постоянной времени и возрастанию чувствительности нити s .

Чтобы получить представление о величине постоянной времени для нитей, обычно используемых при исследованиях турбулентности, представим себе, что в турбулентный поток, средняя скорость которого

составляет 30 м/сек, помещена вольфрамовая нить с диаметром 5 мк. Пусть разность средних температур составляет $\bar{\theta}_w - \theta_g = 115^\circ \text{C}$, а $\theta_g = 288^\circ \text{K}$; тогда соответствующий электрический ток равен 76 ма. Для указанных параметров расчетное значение постоянной времени составляет $M = 3 \cdot 10^{-4}$ сек. Это означает, что по сравнению с нагретой нитью, не обладающей тепловой инерцией, чувствительность при частоте пульсаций 250 сек^{-1} уменьшится почти на 10% или что измеряемая амплитуда пульсации будет на 10% ниже, а смещение по фазе составит около 25° .

Для точного измерения этих пульсаций, а также пульсаций с более высокими частотами должен применяться электронный компенсатор, который по крайней мере компенсировал бы уменьшение коэффициента $(1 + \omega^2 M^2)^{-1/2}$, обусловленное тепловой инерцией.

В числе первых исследователей, показавших необходимость компенсации запаздывания, связанного с тепловой инерцией, и применивших электронную компенсационную схему при измерениях турбулентности, были Драйден и Кьюз [5].

Обычно принято обеспечивать лишь компенсацию амплитуды, причем это оказывается достаточным не только для измерения интенсивности турбулентности и спектра энергии турбулентности, но также и для измерения корреляционных функций, которые представляют собой преобразования Фурье от функции энергетического спектра.

Однако если требуется получить неискаженную осциллограмму пульсаций скорости, то к нулю также должно быть сведено и смещение по фазе, что достигается с помощью соответствующей компенсации.

Как уже отмечалось, при отсутствии компенсации измеряемая интенсивность будет ниже действительной. Более того, оказывается, что измерение пространственных корреляций при помощи двух нагретых нитей без компенсации дает слишком пологую корреляционную кривую, особенно вблизи ее вершины; вследствие этого получаются сильно завышенные значения микромасштаба λ (см. [4]). Но поскольку микромасштаб можно считать характеристикой размера мелких вихрей, благодаря которым происходит диссипация (см. § 1.6), то измерения с некомпенсированными нитями приводят к завышению размеров этих вихрей. Ввиду того, что интенсивность, деленная на микромасштаб, является мерой диссипации, то при этом будет получаться слишком малая величина диссипации.

Рассмотренные факторы оказывают влияние также и на измеряемую величину интегрального масштаба, которая получается больше действительной, однако это влияние проявляется значительно слабее, нежели преувеличение микромасштаба.

Охлаждающее воздействие крепления нити. Обычно по соображениям, которые излагаются ниже, крепление нити по сравнению с самой нитью делают более массивным; поэтому тепловую инерцию

крепления можно считать бесконечно большой, а его температуру — практически равной температуре окружающего воздуха. Вследствие разницы температур нити и крепления, нить подвергается охлаждающему воздействию из-за непосредственной передачи тепла креплению путем теплопроводности. Благодаря этому охлаждению эффективная длина нити сокращается. Максимальная температура посередине нити и средняя температура всей нити оказываются неодинаковыми. Средняя температура нити оказывает решающее влияние на полное электрическое сопротивление нити. С другой стороны, максимальная температура нити является фактором, определяющим прочность нити и возможное поверхностное окисление. Помимо этого, неравномерность распределения температуры влияет на величину постоянной времени. Перечисленные факты требуют создания таких условий, при которых распределение температуры было бы, по возможности, равномерным.

Для анализа распределения температуры вдоль нити, обусловленного охлаждающим воздействием ее крепления, рассмотрим вначале наиболее простой случай, когда нить обтекается установившимся потоком воздуха с равномерным распределением скорости, а крепление, температура которого постоянна и равна температуре окружающей среды, имеет бесконечно большую теплоемкость.

Распределение температуры определяется в этом случае следующим дифференциальным уравнением:

$$I^2 \mathcal{R}_w = (\mathcal{R}_w - \mathcal{R}_g)(A + B \sqrt{U}) - \epsilon \frac{\pi}{4} d^2 \kappa_w \frac{d^2 \theta_w}{dx^2}, \quad (2.22)$$

где $\mathcal{R}_w$ и $\mathcal{R}_g$ — электрические сопротивления на единицу длины соответственно при температуре нити и газа, а κ_w — коэффициент теплопроводности материала нити. Поскольку $\mathcal{R}_w - \mathcal{R}_g \approx b \mathcal{R}_0 (\theta_w - \theta_g)$, то уравнение (2.22) принимает вид

$$\frac{d^2 (\theta_w - \theta_g)}{dx^2} - \frac{b \mathcal{R}_0 (A + B \sqrt{U} - I^2)}{\epsilon \frac{\pi}{4} d^2 \kappa_w} (\theta_w - \theta_g) + \frac{I^2 \mathcal{R}_g}{\epsilon \frac{\pi}{4} d^2 \kappa_w} = 0.$$

Если начало системы координат $x = 0$ поместить посередине нити, то граничные условия запишутся так:

$$\begin{aligned} \theta_w - \theta_g &= 0 \quad \text{при} \quad x = \pm \frac{l}{2}, \\ \frac{d}{dx} (\theta_w - \theta_g) &= 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \end{aligned}$$

а решение дифференциального уравнения получится следующим:

$$\theta_w - \theta_g = \frac{I^2 \mathcal{R}_g / \mathcal{R}_0}{b (A + B \sqrt{U} - I^2)} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} \left(\frac{x}{l_c} \right)}{\operatorname{ch} \left(\frac{x}{2l_c} \right)} \right]. \quad (2.23)$$

Из этого решения имеем

$$\frac{(\theta_w)_{\max} - \theta_g}{(\theta_w)_{\text{ср}} - \theta_g} = \frac{\frac{l}{2l_c} \operatorname{ch}\left(\frac{l}{2l_c}\right) - \frac{l}{2l_c}}{\frac{l}{2l_c} \operatorname{ch}\left(\frac{l}{2l_c}\right) - \operatorname{sh}\left(\frac{l}{2l_c}\right)}, \quad (2.24)$$

где

$$l_c = \frac{d}{2} \sqrt{\frac{\epsilon \pi \kappa_w}{b \mathcal{R}_0 (A + B \sqrt{U} - I^2)}}. \quad (2.25)$$

Величина l_c имеет размерность длины. Она учитывает охлаждающее воздействие крепления и физически может интерпретироваться как длина той части нити, которая прилегает к креплению и эффективно им охлаждается. Поэтому указанная величина называется «холодной длиной»; этот термин был введен Бетховом [6].

Соотношение (2.24) показывает, что распределение температуры с увеличением отношения $l/2l_c$, или l/d , становится более равномерным; это вполне очевидно. Полученное уравнение позволяет вычислить минимальные отношения $l/2l_c$, или l/d , необходимые для получения достаточно равномерного распределения температуры. Подобные вычисления показывают, что для платиноиридиевых нитей величина $l/2l_c$ не должна быть меньше, скажем, 5 или около этого, величина l/d должна составлять по крайней мере 100, а желательно даже более 200; для вольфрамовых нитей эта величина еще выше, так как κ_w для вольфрама почти в 2,5 раза больше, чем для платины.

Охлаждающее воздействие крепления несколько иным путем исследовалось также Лоувэллом [7]. Он оценил относительные концевые потери, которые он определил как отношение количества тепла, отводимого благодаря теплопроводности в крепление, и количества тепла, отдаваемого непосредственно воздушному потоку.

Если мы хотим определить влияние неравномерного распределения температуры на динамику процессов в нити, то следует исходить из более полного дифференциального уравнения, которое представляет собой комбинацию уравнений (2.14) и (2.22), а именно:

$$I^2 \mathcal{R}_w = (\mathcal{R}_w - \mathcal{R}_g)(A + B \sqrt{U}) + \rho_w c_w \frac{\pi}{4} d^2 \frac{\partial \theta_w}{\partial t} - \epsilon \kappa_w \frac{\pi}{4} d^2 \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial x^2}. \quad (2.26)$$

Как и раньше, величину θ_w можно выразить через $\mathcal{R}_w$ при помощи формулы

$$\mathcal{R}_w = \mathcal{R}_g + b \mathcal{R}_0 (\theta_w - \theta_g).$$

Если снова ввести соотношения

$$U = \bar{U} + u, \quad \mathcal{R}_w = \bar{\mathcal{R}}_w + r_w,$$

где пульсации принимаются малыми по сравнению с осредненными величинами, то после отделения членов, содержащих осредненные

по времени параметры, от членов, соответствующих пульсационным величинам, получим

$$I^2 \bar{\mathcal{R}}_w = (\bar{\mathcal{R}}_w - \mathcal{R}_g) (A + B \sqrt{\bar{U}}) - \frac{e\kappa_w \frac{\pi}{4} d^2}{b\mathcal{R}_0} \frac{d^2 \bar{\mathcal{R}}_w}{dx^2}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_w}{\partial t} - \frac{e\kappa_w}{\rho_w c_w} \frac{\partial^2 r_w}{\partial x^2} + b\mathcal{R}_0 \frac{A + B \sqrt{\bar{U}} - I^2}{\rho_w c_w \frac{\pi}{4} d^2} r_w = \\ = - \frac{b\mathcal{R}_0 (\bar{\mathcal{R}}_w - \mathcal{R}_g)}{\rho_w c_w \frac{\pi}{4} d^2} B \sqrt{\bar{U}} \frac{u}{2\bar{U}}. \quad (2.27) \end{aligned}$$

Это дифференциальное уравнение было подробно изучено Бетховом [6]. Решение его является очень громоздким и трудно поддается интерпретации. Однако удалось обнаружить, что из-за очень сложной частотной характеристики нельзя осуществить компенсацию во всем диапазоне изменения ω при помощи всего лишь одной электронной цепи, частотная характеристика которой просто пропорциональна величине $(1 + i\omega M)$. Более того, смещение по фазе ψ непостоянно вдоль нити. Однако при $l/2l_c > 3$ отклонения от полной компенсации остаются малыми (в пределах 2%), если компенсационная схема настраивается на точную компенсацию при $\omega = 0$ и $\omega = \infty$.

Не вдаваясь в подробности расчетов Бетхова, достаточно проанализировать влияние охлаждения нити ее креплением на постоянную времени нити. Выше уже упоминалось, что, благодаря этому охлаждающему воздействию, эффективная длина нити оказывается меньше ее действительной длины.

Посмотрим, каково будет влияние этого фактора на постоянную времени M . Для этой цели воспользуемся уравнением (2.27). Поскольку нас интересует динамика процессов во всей нити, то проинтегрируем это уравнение по x , принимая во внимание, что величина $A + B \sqrt{\bar{U}} - I^2$ по длине нити постоянна, и предполагая, что коэффициенты κ_m и c_w не зависят от температуры. Вводя обозначения

$$r_w = 2 \int_0^{l/2} r_w dx, \quad R_w = 2 \int_0^{l/2} \bar{\mathcal{R}}_w dx, \quad R_g = \mathcal{R}_g l, \quad R_0 = \mathcal{R}_0 l,$$

получаем

$$\begin{aligned} \frac{dr_w}{dt} + bR_0 \frac{A + B \sqrt{\bar{U}} - I^2}{eC_w} r_w - \frac{2\kappa_w}{\rho_w c_w} \left[\frac{\partial r_w}{\partial x} \right]_0^{l/2} = \\ = - \frac{bR_0 (\bar{R}_w - R_g)}{eC_w} B \sqrt{\bar{U}} \frac{u}{2\bar{U}}. \quad (2.28) \end{aligned}$$

Таким образом, для постоянной времени M получается выражение, аналогичное (2.17). Но при одном и том же отношении $\bar{R}_w/R_g$ электрический ток I при различной эффективной длине нити неодинаков. Из соотношения (2.23) после интегрирования по x получаем

$$\frac{\bar{R}_w}{R_g} = 1 + \frac{I^2}{A + B \sqrt{\bar{U}} - I^2} \left(1 - \frac{\text{th } l^*}{l^*} \right),$$

где $l^* = l/2l_c$. Вместо уравнения $\frac{I^2 \bar{R}_w}{\bar{R}_w - R_g} = A + B \sqrt{\bar{U}}$ имеем

$$\frac{I^2 \bar{R}_w}{\bar{R}_w - R_g} \left(1 - \frac{R_g}{\bar{R}_w} \frac{\text{th } l^*}{l^*} \right) = A + B \sqrt{\bar{U}}.$$

Подставляя в (2.17) соотношение

$$A + B \sqrt{\bar{U}} - I^2 = (A + B \sqrt{\bar{U}}) \frac{1 - \frac{\text{th } l^*}{l^*}}{\frac{\bar{R}_w}{R_g} - \frac{\text{th } l^*}{l^*}},$$

получаем

$$M = \frac{C_w}{ebR_0(A + B \sqrt{\bar{U}})} \frac{\bar{R}_w}{R_g} \frac{1 - \frac{R_g}{\bar{R}_w} \frac{\text{th } l^*}{l^*}}{1 - \frac{\text{th } l^*}{l^*}}. \quad (2.29)$$

При отсутствии охлаждающего воздействия крепления ($l_c = 0$ и $l^* = \infty$) постоянная времени имела бы вид

$$[M]_{l_c=0} = \frac{C_w}{ebR_0(A + B \sqrt{\bar{U}})} \frac{\bar{R}_w}{R_g}$$

[ср. с уравнением (2.17) после исключения I^2].

Следует заметить, что формула (2.29) не дает выражения для M в явном виде, так как, согласно (2.25), холодная длина l_c включает в себя член $(A + B \sqrt{\bar{U}} - I^2)$, а стало быть, и постоянную времени M . Из уравнений (2.25) и (2.17) получим

$$l^* = \frac{l}{2d} \sqrt{\frac{\rho_w c_w d^2}{\kappa_w M}}. \quad (2.30)$$

Исключение величины l^* из соотношений (2.29) и (2.30) приводит к очень громоздкой неявной связи между M и l/d . Однако соотношениями (2.29) и (2.30) можно воспользоваться для оценки влияния l_c на M . При этом оказывается, что M уменьшается с возрастанием l^* или с увеличением l/d . Согласно этой зависимости, на первый взгляд, необходимо пользоваться длинными нитями. Однако, как будет показано ниже, имеются другие, более веские соображе-

ния в пользу применения коротких нитей. Более того, при значениях l^* , рекомендованных ранее для обеспечения компенсации во всем диапазоне частот (а именно $l^* > 3$), влияние l^* на величину M весьма невелико.

При анализе охлаждающего воздействия крепления на распределение температуры вдоль нити предполагалось, что крепление обладает бесконечно большой теплоемкостью, а температура его равна температуре окружающего газа. Очевидно, что эти предположения справедливы только в том случае, если размеры крепления велики по сравнению с диаметром нити и если, кроме того, теплопроводность материала крепления высока. Приближенный расчет показывает, что если теплопроводность материала крепления не ниже, чем у материала нити, то, когда отношение площадей поперечных сечений крепления и нити превышает примерно 100, влияние конечного диаметра крепления оказывается пренебрежимо малым. Таким образом, для нити с диаметром 5 мк это должно было бы наблюдаться в тех случаях, когда диаметр крепления больше 0,05 мм, а это условие всегда выполняется. Поэтому требование относительно большой теплоемкости крепления не будет определять собой нижнего предела допустимого диаметра крепления.

Этот нижний предел скорее будет определяться требованиями, обусловленными жесткостью крепления и возможными вибрациями. Вибрации могут иметь либо «сейсмическое» происхождение, либо могут порождаться течением газа позади нити или крепления (эоловы тона). Указанные вибрации нежелательны не только с механической точки зрения, но даже еще в большей степени с аэродинамической, так как соответствующие вибрации нити могли бы походить на не существующую в потоке за нитью турбулентность и, следовательно, могли бы измеряться и интерпретироваться именно как таковые. Проблема жесткости была рассмотрена Ван дер Хегге Цийненом [8] и Лоуэллом [7].

Неравномерность распределения скорости вдоль нити. Во всем предшествовавшем анализе предполагалось, что распределение скорости вдоль нити равномерно. Известно, однако, что в турбулентном потоке распределение скорости не является равномерным даже в зонах, протяженность которых имеет порядок микромасштаба турбулентности. Следовательно, для осуществления действительно «точечных» измерений длина нити термоанемометра не должна превышать, скажем, 0,5 мм даже в турбулентных потоках с умеренной осредненной скоростью. Таким образом, для аэродинамической эффективности термоанемометра нить должна быть, насколько это возможно, короче. С другой стороны, было показано, что, ввиду охлаждающего воздействия крепления, нить не должна быть слишком короткой, ибо тогда распределение температуры вдоль нити будет довольно неравномерным. Поэтому отношение длины к диаметру

для платиноиридиевых нитей рекомендуется брать не менее 200, а для вольфрамовых нитей еще выше.

Чтобы удовлетворять этому требованию, нити короче, чем 0,5 мм, должны иметь диаметр менее 2,5 мк. Однако этот диаметр уже точно определен как предельно допустимая минимальная величина для обеспечения минимальной требуемой прочности. Более того, было бы затруднительно сконструировать крепление нити так, чтобы оно не вызывало отрицательного аэродинамического взаимодействия с нитью, если бы нить была короче, чем 0,5 мм. Поэтому можно с уверенностью рассматривать длину 0,5 мм как практически нижний предел для термоанемометра.

Но если распределение скорости в зонах меньших, чем длина нити, существенно отклоняется от равномерного (а это наступает очень скоро при увеличении скорости турбулентного потока), то при измерении характеристик турбулентности будут наблюдаться ошибки. Скрэмстед [9] не только первым обнаружил это явление, но и предложил поправочные формулы для интенсивности турбулентности и для коэффициентов корреляции, когда используются две нагретые нити.

Рассмотрим случай, когда надлежит измерить интенсивность осевой компоненты турбулентной пульсации скорости u_1 ; при этом нить помещается перпендикулярно к направлению осредненной скорости $\bar{U}_1$. Если бы распределение скорости вдоль нити было равномерным, то среднеквадратичная величина напряжения на нити записывалась бы как

$$\bar{e}^2 = K^2 l^2 \bar{u}_1^2, \quad (2.31)$$

где K — постоянная величина, зависящая от характеристик нити и рабочих условий.

Наоборот, величина $\bar{u}_1^2$, вычисленная из этого выражения для $\bar{e}^2$, была бы правильной, если бы с помощью нити осуществлялось действительно «точечное» измерение.

В предположении об однородном и изотропном турбулентном потоке Скрэмстед показал, что ввиду существенной неравномерности распределения скорости, мерой которой является, например, коэффициент двойной эйлеровой корреляции $g(x_2)$ (см. § 1.6), измеренная величина квадрата напряжения должна записываться следующим образом:

$$(\bar{e}^2)_{\text{измер}} = 2K^2 u_1'^2 \int_0^l (l - x_2) g(x_2) dx_2, \quad (2.32)$$

где x_2 — ось координат, направленная вдоль нити.

Введем поправочный коэффициент C , определяемый формулой

$$\bar{e}^2 = C (\bar{e}^2)_{\text{измер}}. \quad (2.33)$$

Тогда из (2.31) и (2.32) получим

$$\frac{1}{\mathcal{C}} = \frac{2}{l^2} \int_0^l (l - x_2) g(x_2) dx_2. \quad (2.34)$$

Для вычисления $\mathcal{C}$ по этой формуле можно рассмотреть три случая: 1) l очень велико по сравнению с интегральным масштабом Λ_g , 2) l сравнимо с Λ_g , и 3) l очень мало по сравнению с Λ_g .

Если $l \gg \Lambda_g$, то из формулы (2.34) следует, что с увеличением l/Λ_g значение $\mathcal{C}$ неограниченно возрастает, так как в этом случае величина $1/\mathcal{C}$ становится пропорциональной Λ_g/l . Таким образом, бесконечно длинная нить вообще не измерила бы никакой турбулентности!

Прежде чем рассмотреть случай $l \approx \Lambda_g$, обратимся к случаю $l \ll \Lambda_g$, который может наблюдаться, когда l меньше микромасштаба λ_g . Форма корреляционной кривой для таких небольших значений x_2 является параболической (см. § 1.6):

$$g(x_2) \approx 1 - \frac{x_2^2}{\lambda_g^2}. \quad (1.53)$$

Тогда после вычисления интеграла в (2.34) получаем

$$\mathcal{C} = \left(1 - \frac{l^2}{6\lambda_g^2}\right)^{-1}.$$

Наконец, в последнем случае, когда $l \approx \Lambda_g$, поправочный коэффициент будет зависеть от формы корреляционной кривой. Экспоненциальная функция в качестве $g(x_2)$ была уже рассмотрена Скрэмстедом. В дополнение к этому выберем для описания этой зависимости гауссову функцию ошибок. Если

$$g(x_2) = \exp\left(-\frac{|x_2|}{\Lambda_g}\right),$$

получаем

$$\mathcal{C} = 0,5 \frac{l^2}{\Lambda_g l - \Lambda_g^2 \left[1 - \exp\left(-\frac{l}{\Lambda_g}\right)\right]}.$$

Разлагая экспоненту в ряд Тэйлора, это выражение в случае $l/\Lambda_g < 1$ можно приближенно заменить более простым:

$$\mathcal{C} \approx 1 + \frac{1}{3} \frac{l}{\Lambda_g} - \dots$$

Когда

$$g(x_2) = \exp(-\pi x_2^2 / 4\Lambda_g^2),$$

поправочный коэффициент записывается в виде

$$\frac{1}{\mathcal{C}} = 2 \frac{\Lambda_g}{l} \operatorname{erf} \left(\frac{V_{\pi}^{-}}{2} \frac{l}{\Lambda_g} \right) - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\Lambda_g^2}{l^2} \right) \left[1 - \exp \left(- \frac{\pi l^2}{4 \Lambda_g^2} \right) \right],$$

где

$$\operatorname{erf} \left(\frac{V_{\pi}^{-}}{2} \frac{l}{\Lambda_g} \right) = \frac{2}{V_{\pi}^{-}} \int_0^{\frac{V_{\pi}^{-}}{2} \frac{l}{\Lambda_g}} \exp(-y) dy.$$

Для измеренного значения коэффициента продольной корреляции между пульсациями скорости u_1 в двух точках, удаленных друг от друга на расстояние x_3 , Скрэмстед получил формулу

$$[g(x_3)]_{\text{измер}} = \frac{2\mathcal{C}}{l^2} \int_0^l (l - x_2) g(\sqrt{x_2^2 + x_3^2}) dx_2.$$

Интеграл, входящий в эту формулу, может быть вычислен, если g описывается либо экспонентой, либо гауссовой функцией ошибок.

Когда $g(x_3)$ описывается гауссовой функцией ошибок, то получается любопытный результат

$$[g(x_3)]_{\text{измер}} = g(x_3),$$

согласно которому корреляционная функция измеряется правильно.

В случае, когда

$$g(x_3) = \exp \left(- \frac{x_3}{\Lambda_g} \right),$$

для $[g(x_3)]_{\text{измер}}$ получается более громоздкое выражение. Однако если предположить, что $l/x_3 \ll 1$ и, стало быть, $l/\Lambda_g \ll 1$, то получается очень простая приближенная формула, а именно:

$$g(x_3) \approx \frac{1}{\mathcal{C}} [g(x_3)]_{\text{измер}} \approx \left(1 - \frac{1}{3} \frac{l}{\Lambda_g} \right) [g(x_3)]_{\text{измер}}.$$

Из этого соотношения имеем

$$\frac{\Lambda_g}{(\Lambda_g)_{\text{измер}}} \approx 1 - \frac{1}{3} \frac{l}{(\Lambda_g)_{\text{измер}}} - \dots$$

Если измеряется не коэффициент продольной корреляции $\overline{g}$, а коэффициент поперечной корреляции $\overline{f}$, то для однородного изотропного турбулентного потока можно воспользоваться соотношением между $\overline{f}$ и $\overline{g}$, которое будет дано в главе 3, а именно уравнением (3.9).

Тогда вместо (2.34) получаем

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{l} \int_0^l f(x_2) dx_2$$

и

$$f(x_1) = \frac{c}{l} \int_0^l f(\sqrt{Vx_1^2 + x_2^2}) dx_2.$$

Выражения, аналогичные тем, которые получил Скрэмстед, были выведены Френкилем несколько иным путем. Помимо этого, Френкиль значительно расширил область расчетов, рассмотрев более общий случай неизотропной, но однородной турбулентности. Полный отчет о вычислениях Френкиля можно найти в работе [10].

Краткие выводы. Для читателя может оказаться полезным кратко перечислить рассмотренные выше эффекты, связанные с диаметром и длиной нити, а также с отношением длины к диаметру.

Для правильной реакции термоанемометра на высокочастотные пульсации скорости необходимо, чтобы постоянная времени имела малую величину. Это требует, в свою очередь, чтобы (1) нить была тонкой, а (2) распределение температуры вдоль нити было равномерным, что наблюдается, когда отношение l/d достаточно велико (больше 200).

Тонкая нить обеспечивает меньшую постоянную времени термоанемометра, повышает его чувствительность и увеличивает отношение сигнала к шуму электронной схемы.

Однако требования прочности накладывают на величину диаметра нити ограничение снизу. Это противоречит требованию максимального значения l/d , а также минимального значения d . Для применяемых в настоящее время материалов нити этот предел следует считать практически равным 2,5 мк.

Соображения аэродинамической эффективности при измерении характеристик турбулентности требуют, чтобы нить была как можно короче. Но когда нить очень коротка, то значительно усиливается неблагоприятный фактор аэродинамического воздействия крепления на нить.

По-видимому, следует считать, что используемые сейчас в лабораторных опытах для измерений в турбулентных потоках воздуха нити с диаметрами от 2,5 до 5 мк и длиной от 0,5 до 1 мм являются приемлемым компромиссом между перечисленными выше противоречивыми требованиями.

Нелинейные эффекты, обусловленные температурной зависимостью коэффициентов. В уравнении (2.3) содержится несколько коэффициентов, зависимость которых от температуры может привести к возникновению нелинейных эффектов.

Температурную зависимость электрического сопротивления нити R_w можно считать линейной лишь приближенно. Если учесть третий, квадратичный член в правой части формулы (2.4) для R_w , то уравнение (2.3) станет нелинейным относительно $\Theta_w - \Theta_g$.

К счастью, второй коэффициент b_1 очень мал по сравнению с b для всех материалов, применяемых для термоанемометров (см., например, значения, приведенные для вольфрама и платины). Поэтому при обычных рабочих температурах нагретой нити квадратичный член в формуле (2.4) все же очень мал по сравнению с линейным членом, и им, несомненно, можно пренебречь.

Правая часть уравнения (2.3) содержит коэффициенты теплопроводности K_f и вязкости μ_f , удельную теплоемкость c_p и плотность газа ρ_f , причем все эти величины берутся при пленочной температуре.

Удельная теплоемкость c_p практически не зависит от температуры, но коэффициенты теплопроводности и вязкости, а также плотность газа зависят от нее очень сильно. Поскольку коэффициенты теплопроводности и вязкости изменяются с температурой, по существу, одинаково, а именно почти линейно в довольно широком диапазоне температур, то число Прандтля $Pr = c_p \mu / K$ практически не зависит от температуры. Комплекс $K \left(\frac{\rho}{\mu} \right)^{0,5}$ зависит от температуры лишь незначительно, а для двухатомных газов, например воздуха, даже очень слабо.

Следовательно, если рассматривать оба коэффициента A и B в уравнении (2.7), то чувствительным к изменению температуры практически является только коэффициент A , который пропорционален K_f .

Если аппроксимировать температурную зависимость K_f линейной функцией, то можно записать

$$K_f = a + a_1 \Theta_f, \quad (2.35)$$

где в случае воздуха

$$a = 12 \cdot 10^{-6} \text{ кал/см} \cdot \text{сек} (^\circ\text{C}), \quad a_1 = 0,17 \cdot 10^{-6} \text{ кал/см} \cdot \text{сек} (^\circ\text{C})^2.$$

Тогда зависимость коэффициента A_f от температуры выразится следующей формулой:

$$A_f = 0,42 \frac{e\pi l}{bR_0} Pr^{0,2} (a + a_1 \Theta_f) = A_g \left[1 + \frac{a_1}{2(a + a_1 \Theta_g)} (\Theta_w - \Theta_g) \right], \quad (2.36)$$

где

$$A_g = 0,42 \frac{e\pi l}{bR_0} Pr^{0,2} (a + a_1 \Theta_g).$$

Для воздуха при $\Theta_g = 300^\circ \text{K}$ имеем

$$A_f = A_g [1 + 0,0013 (\Theta_w - \Theta_g)].$$

Используя для A_f соотношение (2.36) вместо (2.7), получаем

$$\begin{aligned} \frac{I^2 R_w}{R_w - R_g} &= A_g \left[1 + \frac{a_1}{2(a + a_1 \theta_g)} (\theta_w - \theta_g) \right] + B \sqrt{U} = \\ &= A_g \left[1 + \frac{a_1}{2(a + a_1 \theta_g) b R_0} (R_w - R_g) \right] + B \sqrt{U}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Бетхов и Уэллинг [11, 12] провели теоретическое и экспериментальное исследование эффекта, обусловленного этой нелинейностью. При теоретическом анализе они исходили из уравнения, по существу аналогичного (2.37). Результаты расчетов Бетхова показали, что при этом получается более равномерное распределение температуры вдоль нити, чем по «линеаризованной» теории. Этот вывод вполне понятен, так как квадратичный член обуславливает более высокую интенсивность переноса тепла от нити к движущемуся газу на участках с повышенной температурой, нежели на участках с более низкой температурой. Помимо того, этот член оказывает благоприятное влияние на термодинамические свойства; постоянная времени при этом становится меньше. Отмеченные эффекты зависят от отношения l/d , от диаметра нити и от уровня ее температуры. Для платиноиридиевой нити с диаметром 7 мк и длиной 1,15 мм при электрическом токе силой $I = 75$ ма и скорости воздуха 500 см/сек величина постоянной времени оказывается почти наполовину меньше значения, которое получается по «линеаризованной» теории.

Однако при этом сравнении Бетхов и Уэллинг принимали для A в «линеаризованной» теории величину A_g , т. е. коэффициент, вычисленный по температуре окружающего газа, в то время как коэффициент A должен иметь величину A_f , взятую при средней пленочной температуре. Если выбрать эту последнюю величину, то нелинейный эффект значительно ослабевает. Несколько специально поставленных опытов подтвердили, по крайней мере качественно, существование нелинейного эффекта в случае платиновой и платиноиридиевой нитей.

Влияние больших турбулентных пульсаций на характеристику нагретой нити. До сих пор молчаливо предполагалось, что относительная интенсивность турбулентности мала, ибо именно это условие позволяло линеаризовать характеристику термоанометра по отношению к турбулентным пульсациям [см., например, соотношение (2.11) между пульсацией напряжения и пульсацией скорости].

Представляет практический интерес выяснить, при каких интенсивностях турбулентности подобная линеаризация еще допустима, т. е. не вносит слишком больших ошибок в результаты измерения интенсивности турбулентности.

Относительная интенсивность турбулентности в потоке на некотором расстоянии от турбулизирующей решетки редко превышает

10%. Из чисто интуитивных соображений эту интенсивность можно считать достаточно низкой, чтобы линеаризовать характеристику термоанемометра. Турбулентность, наблюдаемая при течении в трубах и в свободных струях, обычно заметно превосходит приведенную выше величину 10%; опять-таки, основываясь на чистой интуиции, можно заключить, что в этих случаях следует ожидать искажения линеаризованной характеристики термоанемометра. Многие исследователи, в том числе Корсин [13], проводившие опыты с турбулентными свободными струями, обнаруживали это отклонение от линейной характеристики при высокой интенсивности турбулентности и делали попытки оценить ошибку, получающуюся в результате предположения о линейной характеристике термоанемометра.

Влияние больших турбулентных пульсаций на характеристику термоанемометра можно оценить, прежде всего, удерживая в разложении в ряд квадратного корня из скорости [см. уравнение (2.7)] члены второго и более высокого порядков. В то же время больше уже недопустимо ограничиваться рассмотрением только компонент турбулентных пульсаций, имеющих то же направление, что и скорость основного потока $\bar{U}$; следует учитывать также и другие компоненты турбулентных пульсаций. Но нагретая нить чувствительна, по существу, только к тем компонентам скорости, направление которых перпендикулярно к ней; лишь когда компонента скорости, параллельная нити, становится очень большой, то ее влияние на охлаждение становится заметным по сравнению с влиянием компонент, перпендикулярных к нити.

Таким образом, если через u_1 обозначить компоненту турбулентной пульсации скорости в основном направлении потока $\bar{U}$ (которое считается перпендикулярным к нити), а через u_2 — поперечную компоненту турбулентной пульсации скорости, перпендикулярную к нити, то в качестве скорости, определяющей охлаждение нити, следует рассматривать величину

$$U_{эфф} = \sqrt{(\bar{U} + u_1)^2 + u_2^2}. \quad (2.38)$$

Разложение в ряд дает

$$U_{эфф} = \bar{U} \left(1 + \frac{u_1}{\bar{U}} + \frac{u_2^2}{2\bar{U}^2} - \frac{u_1 u_2^2}{2\bar{U}^3} + \dots \right),$$

откуда для среднего значения $\bar{U}_{эфф}$ получаем

$$\bar{U}_{эфф} = \bar{U} \left(1 + \frac{\overline{u_2^2}}{2\bar{U}^2} - \frac{\overline{u_1 u_2^2}}{2\bar{U}^3} + \dots \right).$$

Однако термоанемометром измеряется не это значение скорости. Чтобы найти его, следует воспользоваться выражением для $\sqrt{\overline{U_{эфф}^2}}$

согласно уравнению (2.7):

$$\begin{aligned} \sqrt{U_{\text{эфф}}} &= \sqrt[4]{(\bar{U} + u_1)^2 + u_2^2} = \\ &= \sqrt{\bar{U}} \left(1 + \frac{u_1}{2\bar{U}} - \frac{1}{8} \frac{u_1^2}{\bar{U}^2} + \frac{1}{4} \frac{u_2^2}{\bar{U}^2} + \frac{1}{16} \frac{u_1^3}{\bar{U}^3} - \frac{3}{8} \frac{u_1 u_2^2}{\bar{U}^3} + \dots \right). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Осредняя это выражение по времени, получаем

$$\overline{\sqrt{U_{\text{эфф}}}} = \sqrt{\bar{U}} \left(1 - \frac{1}{8} \frac{\overline{u_1^2}}{\bar{U}^2} + \frac{1}{4} \frac{\overline{u_2^2}}{\bar{U}^2} + \frac{1}{16} \frac{\overline{u_1^3}}{\bar{U}^3} - \frac{3}{8} \frac{\overline{u_1 u_2^2}}{\bar{U}^3} + \dots \right).$$

Отсюда видно, что фактор, влияющий на охлаждение нити, представляет собой комбинацию из двух компонент турбулентных пульсаций u_1 и u_2 . Приравняем это выражение величине $\sqrt{\bar{U}_{\text{изм}}}$. Тогда для $\bar{U}_{\text{изм}}$ получим формулу

$$\begin{aligned} \bar{U}_{\text{изм}} &= \bar{U} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\overline{u_1^2}}{\bar{U}^2} + \frac{1}{2} \frac{\overline{u_2^2}}{\bar{U}^2} + \frac{1}{8} \frac{\overline{u_1^3}}{\bar{U}^3} - \frac{3}{4} \frac{\overline{u_1 u_2^2}}{\bar{U}^3} + \dots \right) \approx \\ &\approx \bar{U} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\overline{u_1^2}}{\bar{U}^2} + \frac{1}{2} \frac{\overline{u_2^2}}{\bar{U}^2} \right). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Это — формула, выведенная Корсином [13], который, пользуясь ею, внес поправки в измеренные значения, чтобы получить действительную осредненную скорость в свободной струе. Поправка может быть либо отрицательной, либо положительной, будучи зависимой, главным образом, от отношения $\overline{u_1^2}/\overline{u_2^2}$. Если отклонение от изотропии мало, т. е. $\overline{u_1^2} \approx \overline{u_2^2}$, то величина поправки является отрицательной; иначе говоря, действительная скорость в этом случае меньше измеренной величины.

Чтобы проанализировать характеристику термоанемометра по отношению к пульсациям, подставим выражение (2.39) для $\sqrt{U}$ в соотношение (2.7):

$$\frac{I^2 R_w}{R_w - R_g} = A + B \sqrt{\bar{U}} \left(1 + \frac{u_1}{2\bar{U}} - \frac{1}{8} \frac{u_1^2}{\bar{U}^2} + \frac{1}{4} \frac{u_2^2}{\bar{U}^2} + \dots \right).$$

Полагая $R_w = \bar{R}_w + r_w$, где величина r_w уже не считается малой по сравнению с $\bar{R}_w$, получаем

$$\begin{aligned} I^2 (\bar{R}_w + r_w) &= \\ &= \left[A + B \sqrt{\bar{U}} \left(1 + \frac{u_1}{2\bar{U}} - \frac{1}{8} \frac{u_1^2}{\bar{U}^2} + \frac{1}{4} \frac{u_2^2}{\bar{U}^2} - \dots \right) \right] (\bar{R}_w - R_g + r_w), \end{aligned}$$

или

$$I^2(\bar{R}_w + r_w) = \\ = (A + B\sqrt{\bar{U}})(\bar{R}_w - R_g + r_w) + B\sqrt{\bar{U}}(\bar{R}_w - R_g)u^* + B\sqrt{\bar{U}}u^*r_w, \quad (2.41)$$

где

$$u^* = \frac{u_1}{2\bar{U}} - \frac{1}{8} \frac{u_1^2}{\bar{U}^2} + \frac{1}{4} \frac{u_2^2}{\bar{U}^2} + \frac{1}{16} \frac{u_1^3}{\bar{U}^3} - \frac{3}{8} \frac{u_1 u_2^2}{\bar{U}^3} + \dots$$

Осреднение выражения (2.41) дает

$$I^2\bar{R}_w = (A + B\sqrt{\bar{U}})(\bar{R}_w - R_g) + B\sqrt{\bar{U}}(\bar{R}_w - R_g)\bar{u}^* + B\sqrt{\bar{U}}\overline{u^*r_w}. \quad (2.42)$$

Этот результат показывает, что действительное осредненное электрическое сопротивление $\bar{R}_w$ отличается от средней величины $\bar{R}_{w_1}$, которая получилась бы по линеаризованной теории при использовании соотношения (2.7), т. е.

$$I^2\bar{R}_{w_1} = (A + B\sqrt{\bar{U}})(\bar{R}_{w_1} - R_g).$$

Решая три уравнения (2.41), (2.42) и (2.7) совместно, найдем соотношение между $\bar{e}^2 = I^2 r_w^2$ и интенсивностью турбулентности. После ряда алгебраических преобразований получим

$$\bar{e}^2 = I^2 r_w^2 = (\bar{R}_w - R_g)^2 \frac{(\bar{R}_{w_1} - R_g)^2}{I^2 R_g^2} B^2 \bar{U} \frac{\bar{u}_1^2}{4\bar{U}^2} [1 - \varphi(u_1, u_2)], \quad (2.43)$$

где

$$\varphi(u_1, u_2) = \frac{1 + 2\alpha}{2} \frac{\bar{u}_1^3}{\bar{U} \bar{u}_1^2} - \frac{\overline{u_1 u_2^2}}{\bar{U} \bar{u}_1^2} - \frac{5 + 12\alpha + 12\alpha^2}{16} \frac{\bar{u}_1^4}{\bar{U}^2 \bar{u}_1^2} - \\ - \frac{1}{4} \frac{\bar{u}_2^4}{\bar{U}^2 \bar{u}_1^2} + \frac{7 + 6\alpha}{4} \frac{\overline{u_1^2 u_2^2}}{\bar{U}^2 \bar{u}_1^2} + \frac{1 + 8\alpha + 12\alpha^2}{16} \frac{\bar{u}_1^2}{\bar{U}^2} + \frac{1}{4} \frac{(\bar{u}_2^2)^2}{\bar{U}^2 \bar{u}_1^2} - \\ - \frac{1 + 4\alpha}{4} \frac{\bar{u}_2^2}{\bar{U}^2} - \dots \quad (2.44)$$

и

$$\alpha = \frac{B\sqrt{\bar{U}}}{I^2} \frac{\bar{R}_{w_1} - R_g}{R_g}, \quad (2.45)$$

В соответствии с линеаризованной теорией получается следующее соотношение [см. уравнение (2.11)]:

$$\overline{e^2} = \frac{(\overline{R_w} - R_g)^4}{I^2 R_g^2} B^2 \overline{U} \left(\frac{\overline{u_1^2}}{4\overline{U}^2} \right)_{\text{лин}}.$$

Отсюда

$$\left(\frac{\overline{u_1^2}}{4\overline{U}^2} \right)_{\text{лин}} = \left(\frac{\overline{u_1^2}}{4\overline{U}^2} \right)_{\text{действ}} \left(\frac{\overline{R_w} - R_g}{R_w - R_g} \right)^2 [1 - \varphi(u_1, u_2)],$$

или, после дальнейших преобразований,

$$\left(\frac{\overline{u_1^2}}{\overline{U}^2} \right)_{\text{лин}} = \left(\frac{\overline{u_1^2}}{\overline{U}^2} \right)_{\text{действ}} [1 - \psi(u_1, u_2)], \quad (2.46)$$

где

$$\psi(u_1, u_2) = \varphi(u_1, u_2) + \frac{\alpha + 2\alpha^2}{4} \frac{\overline{u_1^2}}{\overline{U}^2} - \frac{\alpha}{2} \frac{\overline{u_2^2}}{\overline{U}} + \dots \quad (2.47)$$

Соотношение (2.43) показывает, что та величина, которая на самом деле измеряется, не является компонентой турбулентной пульсации u_1 , а представляет собой комбинацию u_1 с другой компонентой u_2 . Следовательно, чтобы правильно измерять компоненту турбулентных пульсаций u_1 , надо знать не только величину u_2 , но также еще и значения различных корреляций, например $\overline{u_1 u_2^2}$, $\overline{u_1^2 u_2^2}$, ..., которые для неизотропных турбулентных потоков обычно неизвестны.

Для того чтобы оценить величину ошибки, связанной с использованием линеаризованной теории, в случае, когда интенсивность турбулентности не является малой, вычислим по уравнениям (2.47) и (2.44) величину $\psi(u_1, u_2)$ для одномерной турбулентности ($u_2 = 0$) и для изотропной турбулентности.

Для обычных условий работы термоанемометра величина α , определяемая уравнением (2.45), почти не отличается от единицы. Поэтому в последующих расчетах будем полагать, что $\alpha = 1$.

В случае одномерной турбулентности выражение для $\psi(u_1, u_2)$ при $\alpha = 1$ имеет вид

$$\psi(u_1, u_2) = -\frac{29}{16} \frac{\overline{u_1^4}}{\overline{U}^2 \overline{u_1^2}} + \frac{33}{16} \frac{\overline{u_1^2}}{\overline{U}^2} + \frac{3}{2} \frac{\overline{u_1^3}}{\overline{U} \overline{u_1^2}} + \dots$$

Ввиду того, что скорость турбулентных пульсаций u_1 является случайной величиной, для нее можно принять нормальное гауссово распределение, в случае которого получаем

$$\overline{u_1^4} = 3\overline{u_1^2}^2 = 3\overline{u_1'^2}^2, \quad \overline{u_1^3} = 0,$$

откуда

$$\psi(u_1, u_2) = -\frac{27}{8} \frac{u_1'^2}{\bar{U}^2} + \dots$$

В случае изотропной турбулентности при $\alpha = 1$ имеем следующее выражение для $\psi(u_1, u_2)$:

$$\begin{aligned} \psi(u_1, u_2) = & -\frac{29}{16} \frac{\bar{u}_1^4}{\bar{U}^2 \bar{u}_1^2} - \frac{1}{4} \frac{\bar{u}_2^4}{\bar{U}^2 \bar{u}_1^2} + \frac{13}{4} \frac{\bar{u}_1^2 \bar{u}_2^2}{\bar{U}^2 \bar{u}_1^2} + \frac{33}{16} \frac{\bar{u}_1^2}{\bar{U}^2} + \\ & + \frac{1}{4} \frac{(\bar{u}_2^2)^2}{\bar{U}^2 \bar{u}_1^2} - \frac{7}{4} \frac{\bar{u}_2^2}{\bar{U}^2} + \dots, \end{aligned}$$

поскольку, как будет показано в главе 3, $\bar{u}_1^3 = \bar{u}_1 \bar{u}_2^2 = 0$.

Если мы не только примем распределение Гаусса для u_1 и u_2 , но предположим еще, что эти компоненты нормально коррелированы, то получим

$$\bar{u}_1^2 = \bar{u}_2^2 = u_1'^2, \quad \bar{u}_1^4 = \bar{u}_2^4 = 3u_1'^4, \quad \bar{u}_1^2 \bar{u}_2^2 = u_1'^2 u_2'^2 = u_1'^4,$$

на основании чего величина $\psi(u_1, u_2)$ представится в виде

$$\psi(u_1, u_2) = -\frac{19}{8} \frac{u_1'^2}{\bar{U}^2}.$$

Таким образом, мы видим, что в этих двух особых случаях $\psi(u_1, u_2)$ имеет отрицательную величину. Это означает, что линейризованная теория приводит к завышенным значениям $u_1'/\bar{U}$. Возникающая при этом ошибка является величиной порядка $u_1'^2/\bar{U}^2$; для $u_1'/\bar{U} = 0,2$ эта ошибка в случае одномерной турбулентности составила бы приблизительно 13%, а в случае изотропной турбулентности — 10%.

Иногда влияние высокой интенсивности турбулентности на характеристику термоанемометра исследуют путем приведения нити в колебательное движение в воздушном потоке с низкой интенсивностью турбулентности, намереваясь таким образом создать условия одномерной турбулентности с высокой интенсивностью. Если положить, что пульсационное движение относительно нити носит чисто гармонический характер, т. е. $u_1 = u_1^* \sin \omega t$, то при $\alpha = 1$ и $\bar{u}_1^4 = \frac{3}{2} u_1'^4$

получим $\psi(u_1, u_2) = -\frac{21}{32} \frac{u_1'^2}{\bar{U}^2}$. Нетрудно убедиться, что эта величина значительно меньше той, которая получается для одномерного беспорядочно пульсирующего потока. Следовательно, подобные опыты

приводят к слишком оптимистичным выводам. Во всяком случае, сама исходная предпосылка делает сомнительным применение полученных подобным способом поправочных коэффициентов к действительным турбулентным потокам с большой интенсивностью.

Резюмируя сказанное, можно сделать вывод, что точное измерение характеристик турбулентности, обладающей высокой интенсивностью, почти невозможно.

В принципе можно воспользоваться теорией, по которой учитывается кривизна основной тарировочной кривой. Однако для применения этой теории требуется знать еще структуру турбулентности потока.

Наконец, если при измерении характеристик турбулентности допустима ошибка в 10—20%, то в случае потока с интенсивностью турбулентности 20—25% можно пользоваться линейными соотношениями.

Влияние сжимаемости. При большой скорости потока, скажем выше 100 м/сек, на течение около нити может повлиять фактор сжимаемости. Картина обтекания нити в случае сверхзвуковых скоростей будет особенно отличаться от той, которая наблюдается при малой дозвуковой скорости. Вследствие этого различия картин обтекания, а также из-за непосредственного влияния сжимаемости, распределение температуры в поле течения около нагретой нити тоже будет иметь свои отличия. Так, при преобразовании кинетической энергии в давление над элементом жидкости совершается работа сжатия, которая, превращаясь в тепло, приводит к повышению температуры. Температура в критической точке будет при этом соответственно выше «статической» температуры движущейся жидкости.

Очевидно, что отмеченное проявление сжимаемости оказывает влияние на перенос тепла от нагретой нити к более холодному окружающему воздуху и что соотношение (2.1) уже больше не будет справедливо.

Чтобы учесть влияние сжимаемости, следует воспользоваться более общим соотношением, включающим число Маха M , т. е. отношение скорости потока к местной скорости звука:

$$Nu = f(Re, Pr, M).$$

Влияние сжимаемости движущейся жидкости на характеристику термоанометра исследовалось Коважным [15], Лоувэллом [7], а также Лауфером и Мак-Клелланом [82]. Коважный проводил опыты с нитями в сверхзвуковом потоке в диапазоне чисел Маха от 1,15 до 2,05. Он обнаружил, что при малой разности температур нити и воздуха к сверхзвуковому потоку применимо соотношение, подобное (2.1), если скорость и плотность относить к условиям в невозмущенном потоке, а коэффициенты вязкости и теплопроводности — к условиям в критической точке. Тогда получается универсальное соотношение,

которое не зависит от числа Маха. В случае воздуха это соотношение имеет вид

$$Nu = 0,58 Re^{0,5} - 0,795.$$

Для вычисления тепловых потерь требуется знать разность температур $\theta_w - \theta_e$, где θ_e — равновесная температура, которую имела бы ненагретая нить в сверхзвуковом потоке.

При больших величинах температурного напора $(\theta_w - \theta_e)/\theta_e$ проявляется нелинейный эффект, который, однако, отличен от того, который наблюдается при дозвуковой скорости. В отличие от случая несжимаемой жидкости, число Нуссельта с увеличением $(\theta_w - \theta_e)/\theta_{\text{торм}}$ уменьшается. Эмпирическая формула, предложенная для воздуха Коважным [15], имеет вид

$$Nu = (0,58 \sqrt{Re} - 0,795) \left(1 - 0,18 \frac{\theta_w - \theta_e}{\theta_{\text{торм}}} \right).$$

Для оценки величины θ_e можно воспользоваться эмпирическим соотношением $\frac{\theta_e}{\theta_{\text{торм}}} \approx 0,93 - 0,98$. Эккерт и Польгаузен [14] рекомендуют формулу

$$\frac{\theta_e}{\theta_{\text{торм}}} \approx Pr^{0,5}$$

для случая, когда число Прандтля не очень сильно отличается от единицы.

Однако, согласно Лауферу и Мак-Клеллану [82], которые тоже проводили систематическое исследование тонких платинородиевых (90% платины — 10% родия) нитей в сверхзвуковом потоке воздуха, значения, полученные Коважным, на 20—25% выше, чем в действительности. В диапазоне изменения числа Маха от 1,3 до 4,5 Лауфер и Мак-Клеллан нашли также, что число Нуссельта изменяется пропорционально квадратному корню из числа Рейнольдса, если оба эти критерия относить к условиям в потоке за отошедшей ударной волной перед нитью. Для значений таким способом определенного числа Рейнольдса, превышающих 20, равновесная температура θ_e имела постоянную величину $0,95\theta_{\text{торм}}$ независимо от числа Рейнольдса и числа Маха невозмущенного потока. Из результатов Лауфера и Мак-Клеллана можно вывести соотношение

$$Nu = a Re^{0,5} - b,$$

где величина a в диапазоне температурного напора $(\theta_w - \theta_e)/\theta_e$ от 0 до 1 изменяется в пределах от 0,465 до 0,49, а величина b — от 0,55 до 0,8. При $Re < 20$ отношение $\theta_e/\theta_{\text{торм}}$ с уменьшением числа Рейнольдса резко возрастает, и приведенная выше зависимость уже больше не выполняется.

§ 2.4. Измерение характеристик турбулентности с помощью термоанемометра; метод постоянного тока

Представим себе равномерный поток с осредненной скоростью $\bar{U}$, направление которой совпадает с компонентой турбулентной пульсации u_1 , а компоненты u_2 и u_3 соответствуют поперечному направлению.

Предположим, далее, что турбулентные пульсации малы по сравнению с $\bar{U}$ и что влияние сжимаемости не проявляется; при этих условиях вполне справедливы линейные соотношения для тепловых потерь.

Измерение интенсивности турбулентности. Интенсивность осевой компоненты турбулентной пульсации скорости $u'_1 = \sqrt{\overline{u_1'^2}}$ можно измерить очень просто: путем подачи сигнала напряжения $e = -su_1$ [см. уравнение (2.12)] через усилитель (с компенсацией термического запаздывания или без нее) на термопару, которая непосредственно измеряет среднеквадратичную величину тока, соответствующего напряжению e .

Интенсивность поперечных компонент турбулентной пульсации скорости u'_2 и u'_3 может быть измерена путем применения нагретой нити, чувствительной к направлению.

Скорость охлаждения нити определяется, главным образом, компонентой скорости, перпендикулярной к нити. Влияние компоненты

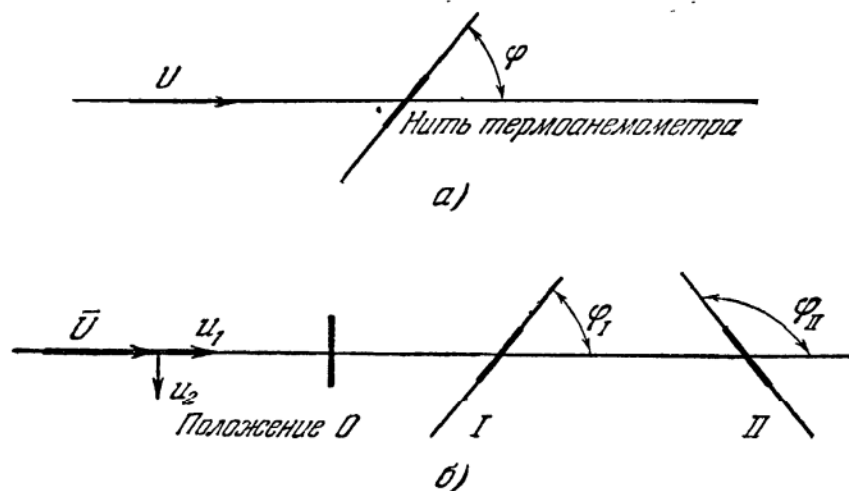


Рис. 2.3. Измерение компонент турбулентных пульсаций скорости u_1 и u_2 с помощью термоанемометра.

скорости, параллельной нити, становится заметным, лишь когда нормальная компонента скорости очень мала или отсутствует вовсе.

Следовательно, если нить составляет с направлением скорости угол φ (см. рис. 2.3, а), то охлаждение происходит, в основном, за счет компоненты $U \sin \varphi$; только при очень малых значениях φ

важную роль начинает играть также компонента $U \cos \varphi$. Эффективную величину U можно приближенно получить из соотношения

$$U_{\text{эф}}^2 = U^2 (\sin^2 \varphi + A^2 \cos^2 \varphi),$$

где коэффициент A в зависимости от величины скорости принимает значения между 0,1 и 0,3 (величина A с уменьшением скорости возрастает).

Однако для практически интересного диапазона $20^\circ < \varphi \leq 90^\circ$ оказывается возможным учитывать только компоненту $U \sin \varphi$. При этом вместо уравнения (2.7) получим

$$\frac{I^2 R_w}{R_w - R_g} = A + B \sqrt{U \sin \varphi}. \quad (2.48)$$

Когда требуется измерить поперечную компоненту турбулентной пульсации скорости u_2 , то нить надо расположить в плоскости, проходящей через U и u_2 под углом φ к направлению U . Результирующая компонента, перпендикулярная к нити, имеет вид

$$\{[(\bar{U} + u_1) \sin \varphi + u_2 \cos \varphi]^2 + u_3^2\}^{1/2}.$$

Подстановка этого выражения в (2.48) и использование предположения о том, что пульсации малы по сравнению с $\bar{U}$, так что квадратичным членом, а также членами более высоких порядков можно пренебречь, приводит к следующим результатам:

$$\frac{I^2 \bar{R}_w}{\bar{R}_w - R_g} = A + B \sqrt{\bar{U} \sin \varphi}$$

при условии осреднения по времени и

$$-\frac{I^2 R_g r_w}{(\bar{R}_w - R_g)^2} = B \sqrt{\bar{U} \sin \varphi} \left(\frac{u_1}{2\bar{U}} + \frac{u_2}{2\bar{U}} \operatorname{ctg} \varphi \right),$$

откуда

$$e = I r_w = -\frac{(\bar{R}_w - R_g)^2}{2 I R_g} B \sqrt{\bar{U} \sin \varphi} \left(\frac{u_1}{\bar{U}} + \frac{u_2}{\bar{U}} \operatorname{ctg} \varphi \right) = -s_1 u_1 - s_2 u_2, \quad (2.49)$$

где s_1 и s_2 — величины чувствительности нагретой нити к турбулентным пульсациям скорости u_1 и u_2 , определяемой уравнением (2.12).

Следовательно, в указанных условиях результат измерения определяется эффектами от двух компонент u_1 и u_2 . Чтобы разделить эти эффекты, найдем сигналы нагретой нити в положениях 0, I и II, как это показано на рис. 2.3, б. Имеем:

$$\text{в положении } 0: (e)_0 = -(s_1)_0 u_1,$$

$$\text{в положении } I: (e)_I = -(s_1)_I u_1 - (s_2)_I u_2,$$

$$\text{в положении } II: (e)_{II} = -(s_1)_{II} u_1 + (s_2)_{II} u_2.$$

Если сигналы, полученные в различных положениях, подать на термопару, то будем иметь

$$\begin{aligned}(\bar{e}^2)_0 &= (s_1^2)_0 \bar{u}_1^2, \\ (\bar{e}^2)_I &= (s_1)_I^2 \bar{u}_1^2 + (s_2)_I^2 \bar{u}_2^2 + 2(s_1)_I (s_2)_I \overline{u_1 u_2}, \\ (\bar{e}^2)_{II} &= (s_1)_{II}^2 \bar{u}_1^2 + (s_2)_{II}^2 \bar{u}_2^2 - 2(s_1)_{II} (s_2)_{II} \overline{u_1 u_2}.\end{aligned}\quad (2.50)$$

Эти уравнения могут быть решены относительно компонент u'_1 и u'_2 и, кроме того, относительно величины $\overline{u_1 u_2}$. Вместо того, чтобы пользоваться одной нитью, помещаемой в различные положения, можно применить две нити, расположенные в виде буквы X или V. Если нити имеют одинаковые свойства и являются идентичными, то $(s_1)_I = (s_1)_{II}$ и $(s_2)_I = (s_2)_{II}$. Тогда интенсивности u'_1 и u'_2 можно получить более простым способом непосредственно из соотношений

$$\begin{aligned}(\bar{e}_I + \bar{e}_{II})^2 &= 4s_1^2 \bar{u}_1^2, \\ (\bar{e}_I - \bar{e}_{II})^2 &= 4s_2^2 \bar{u}_2^2.\end{aligned}\quad (2.51)$$

Интенсивность поперечной компоненты u'_3 турбулентной пульсации скорости может быть определена аналогичным путем.

Однако изготовление двух идентичных нитей является довольно-таки нелегкой задачей, оно едва ли осуществимо и потребует очень квалифицированного труда. Но чтобы измерения скоростей турбулентных пульсаций были надежными, различие между нитями должно быть чрезвычайно мало. Если $s_I = (1 + n)s_{II}$, то при измерении величин $\bar{u}_1^2$, $\bar{u}_2^2$ и $\bar{u}_3^2$ получается ошибка около $100n\%$.

Метод постоянного тока рассматривался в работах [5] и [20-25]; эта литература характеризует прогресс, достигнутый в применении этого метода. В частности, работа Шубауэра и Клебанова [25] дает довольно полное описание устройства термоанемометра; читателю следует также рекомендовать обзорную статью Купера и Тулина [83].

Измерение двойных и тройных корреляций скорости. Выше уже было показано, что двойную корреляцию $\overline{u_1 u_2}$ можно получить из решения уравнения (2.50). Это довольно просто, если предположить, что $(s_1)_I = (s_1)_{II}$ и $(s_2)_I = (s_2)_{II}$, так как в этом случае

$$(\bar{e}^2)_I - (\bar{e}^2)_{II} = 4s_1 s_2 \overline{u_1 u_2}.$$

Аналогично можно определить корреляцию $\overline{u_1 u_3}$.

Для отыскания корреляции $\overline{u_2 u_3}$ поместим X-образно расположенные нити так, чтобы одна нить, скажем, совпадала с плоскостью

$(\bar{U}, u_2)$, а другая — с плоскостью $(\bar{U}, u_3)$ и каждая из нитей составляла равные углы φ с направлением скорости $\bar{U}$. Если обе нити снова считать идентичными, то

$$e_I = -s_1 u_1 - s_2 u_2, \quad e_{II} = -s_1 u_1 - s_2 u_3,$$

а величина $\overline{u_2 u_3}$ может быть вычислена из соотношения

$$(\overline{e_I - e_{II}})^2 = s_2^2 (\overline{u_2^2} + \overline{u_3^2} - 2\overline{u_2 u_3}).$$

Пространственные эйлеровы корреляции g и f тоже можно найти с помощью двух нитей.

Для определения коэффициента поперечной корреляции $g(x_2)$ поместим нити в двух точках A и B , расположенных друг от друга на расстоянии x_2 в одной и той же плоскости, перпендикулярной к направлению U . С помощью этих нитей измерим осевые компоненты турбулентных пульсаций в точках A и B ; это делается путем размещения нитей перпендикулярно к направлению скорости U . Сигналы напряжения от нитей A и B запишутся в виде

$$e_A = (s_1)_A (u_1)_A, \quad e_B = (s_1)_B (u_1)_B.$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} \overline{(e_A + e_B)^2} &= (\overline{s_1^2 u_1^2})_A + (\overline{s_1^2 u_1^2})_B + 2(s_1)_A (s_1)_B \overline{(u_1)_A (u_1)_B}, \\ \overline{(e_A - e_B)^2} &= (\overline{s_1^2 u_1^2})_A + (\overline{s_1^2 u_1^2})_B - 2(s_1)_A (s_1)_B \overline{(u_1)_A (u_1)_B}. \end{aligned}$$

Корреляция $\overline{(u_1)_A (u_1)_B}$ в этом случае может быть вычислена либо по отношению

$$\frac{\overline{(e_A + e_B)^2} - \overline{(e_A - e_B)^2}}{\overline{(e_A + e_B)^2} + \overline{(e_A - e_B)^2}},$$

если нити достаточно одинаковы, чтобы можно было положить $(s_1)_A = (s_1)_B$, либо по отношению

$$\frac{\overline{(e_A + e_B)^2} - \overline{(e_A - e_B)^2}}{e'_A e'_B},$$

в случае которого соблюдение равенства $(s_1)_A = (s_1)_B$ не обязательно, поскольку эти величины в данном выражении сокращаются.

Если нити неидентичны, но мы тем не менее хотим воспользоваться первым способом, то это уравнение все же может быть решено в случае, когда поле турбулентности потока однородно и, стало быть, $(u'_1)_A = (u'_1)_B = u'_1$. Полагая, что $(s_1)_B = (1 + n)(s_1)_A$, имеем

$$\frac{\overline{(e_A + e_B)^2} - \overline{(e_A - e_B)^2}}{\overline{(e_A + e_B)^2} + \overline{(e_A - e_B)^2}} = \frac{2(s_1)_A (s_1)_B}{(\overline{s_1^2})_A + (\overline{s_1^2})_B} \frac{\overline{(u_1)_A (u_1)_B}}{u_1'^2} \approx \left(1 - \frac{n^2}{2}\right) g(x_2).$$

Даже в том случае, когда $(s_1)_A$ и $(s_1)_B$ отличаются друг от друга на 20%, ошибка при измерении величины $g(x_2)$ составляет всего около 2%. Отсюда можно сделать вывод, что нити вовсе не обязательно должны быть совершенно идентичны, а могут обладать несколько отличными свойствами.

Подобный метод можно применить и для отыскания коэффициента продольной корреляции f .

Если одна нить расположена очень близко от другой, то при использовании описанного метода могут возникнуть трудности, обусловленные тем, что в этом случае на нить, находящуюся ниже по течению, будет оказывать влияние аэродинамический след от другой нити. Чтобы избежать этого затруднения, можно расположить нити не точно в плоскости, параллельной скорости осредненного потока $\bar{U}$, а немного сместить вторую нить вбок относительно первой нити. Очевидно, однако, что в этом случае должно как-то проявиться влияние поперечной корреляции $g(x_2)$. Таким образом, вместо одного затруднения так или иначе возникает другое. Следовательно, измерения, осуществляемые тем или иным способом, при малых значениях осевого расстояния x_1 будут в какой-то степени ненадежными.

Имеется, однако, еще один метод, который позволяет определить коэффициент продольной корреляции $f(x_1)$. Этим методом можно пользоваться, когда все поле имеет постоянную и равномерную осредненную скорость и когда относительная интенсивность турбулентности $u'_1/\bar{U}$ очень мала. В главе 1 было показано, что в этом случае эйлерова пространственная корреляция $f(x_1)$ почти идентична с эйлеровой временной корреляцией $R_E(t)$, так как в первом приближении $x_1 = \bar{U}t$ [см. уравнения (1.64) и (1.65)]. Следовательно, величина $f(x_1)$ может быть определена по измерению эйлеровой временной корреляции $R_E(t)$.

Метод и аппаратура для измерения временных корреляций в некоторой точке поля течения были разработаны Фавром [16, 17]. В принципе этот метод состоит в записи пульсаций скорости на магнитную ленту. Затем эта лента приводится в движение с известной скоростью V между двумя звукозаписывающими устройствами, расположенными друг от друга на расстоянии a . Изменение электрического напряжения, возникающего на звукозаписывающих устройствах, соответствует турбулентным пульсациям с интервалом времени $\tau = a/V$. Для определения коэффициента корреляции $R_E(t)$ выходные сигналы обоих контактов можно обрабатывать так же, как выходные сигналы двух нагретых нитей; этот способ описан выше.

С помощью этого метода можно также измерять пространственно-временные корреляции, используя для этой цели две нагретые нити, помещенные в двух точках поля течения, и регистрируя пульсации, воспринимаемые этими нитями, на двух магнитных лентах. Фавр

со своими сотрудниками осуществил подобные измерения при изотропном турбулентном течении вниз по потоку от турбулизирующей решетки и в турбулентном пограничном слое на плоской пластине.

Основной недостаток практического использования этого метода состоит, по-видимому, в том, что при этом требуется довольно сложный лентопротяжный механизм с широким диапазоном скоростей. Функции временной корреляции некоторой случайной величины можно, конечно, получить и другими способами, которые позволяют регистрировать либо непрерывный, либо импульсный сигнал в течение некоторого наперед заданного промежутка времени. Скиннер [81] приводит описание аппаратуры, основанной на принципе последнего из этих методов и искусно примененной для измерения временной корреляции скорости.

Еще один метод получения корреляции по осциллограммам описан Такером [79]. Запись осциллограмм осуществляется фотографическим способом в виде черно-белого изображения на прозрачной пленке. Поперечные корреляции получаются путем «сканирования» двух записей соответствующими световыми лучами и направления этих лучей после того, как они проходят через прозрачную пленку, на один и тот же фотоэлемент. Сумма двух сигналов напряжения на фотоэлементе подается через усилитель в цепь формирования прямоугольных импульсов. Если $e_1(t)$ — функция напряжения одной записи, а $e_2(t + \tau)$ — другой, то

$$\overline{[e_1(t) + e_2(t + \tau)]^2} = \overline{[e_1(t)]^2} + \overline{[e_2(t + \tau)]^2} + 2\overline{e_1(t)e_2(t + \tau)}.$$

Третий член в правой части этого уравнения пропорционален искомой корреляции. Ясно, что можно «сканировать» и одну запись двумя световыми лучами, отстоящими друг от друга на расстоянии $V\tau$, где V — скорость «сканирования»; этим путем удастся получить временные корреляции.

Для определения корреляции можно подавать выходные сигналы от двух нагретых нитей вместо термпары на две пары отклоняющих пластин катодно-лучевой трубки. При этом отклонение светового пятна на экране трубки, соответствующее одной из нагретых нитей, будет перпендикулярно к отклонению светового пятна, соответствующему другой нагретой нити. В результате световое пятно описывает на экране так называемые фигуры Лиссажу. Фотография этого изображения, произведенная с длительной экспозицией, дает некоторый эллипс, который является корреляционным. Пусть $2a$ и $2b$ означают соответственно большую и малую оси этого эллипса; тогда можно показать, что коэффициент корреляции равен $(a^2 - b^2)/(a^2 + b^2)$.

Когда коэффициент корреляции близок к нулю, то отклонение эллипса от окружности очень мало. В этом случае точное измерение

величин a и b , а значит и малых значений коэффициента корреляции, очень затруднительно. Поскольку, однако, точная форма корреляционной кривой при малых значениях коэффициента корреляции не представляет особого интереса, то недостаток, присущий этому методу, не очень существен. Более существенным этот недостаток становится в тех случаях, когда коэффициент корреляции почти равен единице. При этом эллипс вырождается в почти прямую линию переменной толщины. И в связи с тем, что кривые, регистрируемые на экране трубки, уже обладают конечной толщиной, измерить незначительные отклонения от «нормальной» толщины этих линий представляется очень трудной задачей: даже ошибку в 1% при определении коэффициента корреляции следует признать довольно большой, если она относится к разнице по сравнению с единицей. Поскольку форма кривой эйлеровой пространственной корреляции вблизи ее вершины имеет важное значение для определения величины масштаба диссипации, желательно видоизменить этот метод так, чтобы он давал более точное значение коэффициента корреляции в окрестности полной корреляции.

Вероятно, следует еще раз напомнить, что другие методы, описанные выше, также обладают этим недостатком, приводя к относительно неточному определению коэффициента корреляции при значениях его, близких к единице.

Тэйлор [18] предложил метод, с помощью которого коэффициент корреляции R в окрестности $R=1$ можно определять более точно. В этом методе непосредственно измеряется величина $1 - R^2$.

Как было показано в главе 1, для описания изменения двойной корреляции по времени должна быть известна тройная корреляция $S_{ik,j}$. Кроме того, упоминалось также, что в случае однородной изотропной турбулентности существенными являются только три из 27 компонент тензора тройной корреляции; коэффициенты этих трех корреляций суть $k(r)$, $h(r)$ и $q(r)$ [см. (1.46)]. Как будет показано ниже, в главе 3, между этими тремя корреляциями имеется определенная зависимость; поэтому вполне достаточно измерить только одну из них. Наиболее просто производится измерение коэффициента тройной корреляции $k(r)$. Для этой цели две нагретые нити располагаются параллельно друг другу, будучи при этом перпендикулярными к направлению скорости осредненного потока U и удаленными одна от другой в направлении осредненного потока на расстояние $r = x_1$. Пусть A и B — две интересующие нас точки, а $(\dot{e})_A$ и $(\dot{e})_B$ — пульсации напряжения, вызываемые нитями соответственно в точках A и B . Тогда

$$k(r) = \frac{\overline{e_A^2 e_B}}{e'^3}.$$

Таким образом, сигнал от нити в точке A должен быть преобразован в прямоугольный. И если это возможно, то величину $\overline{e_A^2 e_B}$ можно получить из соотношения

$$4\overline{e_A^2 e_B} = (\overline{e_A^2 + e_B})^2 - (\overline{e_A^2 - e_B})^2.$$

Один из методов получения величины $\overline{e_A^2 e_B}$ описан Таунсендом [19]. Этот метод основан на квадратичной анодной характеристике триода при малом анодном токе, когда режим работы триода соответствует точке максимальной кривизны этой характеристики. Таким образом, имеем соотношение

$$i = \alpha e + \beta e^2,$$

где i — анодный ток, а e — потенциал сетки.

Возьмем теперь два идентичных триода и подадим на один из них сигнал $(e)_A$, а на другой — $-(e)_A$. Тогда полный анодный ток этих двух триодов будет равен

$$i_1 + i_2 = 2\beta e_A^2.$$

Этот суммарный сигнал вместе с сигналом $+(e)_B$ подается на третий триод, а тот же суммарный сигнал вместе с сигналом $-(e)_B$ на четвертый триод. При этом для третьего триода имеем

$$i_3 = \alpha(\beta e_A^2 + e_B) + \beta(\beta e_A^2 + e_B)^2,$$

а для четвертого триода

$$i_4 = \alpha(\beta e_A^2 - e_B) + \beta(\beta e_A^2 - e_B)^2,$$

откуда

$$\overline{i_3 - i_4} = 4\beta^2 \overline{e_A^2 e_B}.$$

Измерение спектра и масштаба турбулентности. Спектральный анализ, например, квадрата интенсивности $\overline{u_1^2}$ может быть произведен при помощи соответствующей схемы с узкополосным фильтром. Основное требование при этом состоит в том, чтобы входной сигнал не имел искажения и не претерпевал значительных изменений по амплитуде. Эту амплитуду, конечно, можно было бы с помощью усилителя вновь повысить до ее первоначальной величины, но в этом случае усилитель не должен вносить какого-либо искажения.

Описание схемы фильтра можно найти в статье Бетхова [26].

Интегральный масштаб, например эйлеров масштаб,

$$\Lambda_f = \int_0^\infty f dx_1$$

может быть получен путем определения площади под кривой $f(x_1)$. При этом могут возникнуть затруднения, когда корреляционная кривая для больших расстояний устойчиво колеблется около нулевого значения. Конечно, эту кривую можно было бы прервать в некоторой точке, но это вносит произвол и является неправомерным.

Для частного случая определения эйлерова интегрального временного масштаба $\mathcal{J}_E = \int_0^{\infty} R_E dt$ Таунсендом [19] был предложен еще один, очень изящный метод. В этом методе используется функция энергетического спектра $E_1(n)$. Из соотношения

$$R_E(t) = \frac{1}{u_1^2} \int_0^{\infty} E_1(n) \cos 2\pi n t \, dn \quad (1.88)$$

следует, что

$$\int_0^{\infty} R_E(t) \Phi(t) \, dt = \frac{1}{u_1^2} \int_0^{\infty} E_1(n) \, dn \int_0^{\infty} \Phi(t) \cos 2\pi n t \, dt, \quad (2.52)$$

где $\Phi(t)$ — произвольная функция, которая, однако, должна удовлетворять следующим условиям:

1. $\int_0^{\infty} R_E(t) \Phi(t) \, dt = \int_0^{\infty} R_E(t) \, dt = \mathcal{J}_E$.
2. Интеграл $\int_0^{\infty} \Phi(t) \cos 2\pi n t \, dt$ сходится.

3. Процесс интегрирования функции Φ может быть осуществлен с помощью электронной схемы.

Эти условия удовлетворяются, когда функция $\Phi(t)$ такова, что для промежутков времени, при которых величина $R_E(t)$ все еще существенна, отклонение ее от единицы мало, но если t велико, она стремится к нулю и при этом второй интеграл сходится.

Подобной функцией, которая к тому же удовлетворяет и третьему условию, является, например,

$$\Phi(t) = \left(1 + \frac{t}{t_0}\right) \exp\left(-\frac{t}{t_0}\right).$$

Подстановка этого выражения в соотношение (2.52) дает

$$\mathcal{J}_E = \int_0^{\infty} R_E(t) \Phi(t) \, dt = \frac{1}{u_1^2} \int_0^{\infty} E_1(n) \frac{2t_0}{(1 + 4\pi^2 n^2 t_0^2)^2} \, dn.$$

Величина t_0 должна быть выбрана так, чтобы

$$\int_0^{\infty} R_E(t) \left(1 + \frac{t}{t_0}\right) \exp\left(-\frac{t}{t_0}\right) dt = \int_0^{\infty} R_E(t) dt.$$

Это условие удовлетворяется, если значение t_0 велико по сравнению с $\mathcal{J}_E$. Положим, например, что зависимость $R_E(t)$ представляется экспоненциальной функцией вида $\exp(-t/\mathcal{J}_E)$. Тогда правая часть этого уравнения дает величину $\mathcal{J}_E$, а левая —

$$t_0 \frac{2 + t_0/\mathcal{J}_E}{(1 + t_0/\mathcal{J}_E)^2}.$$

Следовательно, если $\mathcal{J}_E/t_0 \ll 1$, то отношение левой части уравнения к правой принимает вид

$$\frac{t_0}{\mathcal{J}_E} \frac{2 + t_0/\mathcal{J}_E}{(1 + t_0/\mathcal{J}_E)^2} = 1 + \text{член порядка } \frac{\mathcal{J}_E^2}{t_0^2}.$$

Очевидно, что, когда осредненная скорость турбулентного потока $\bar{U}$ велика по сравнению с турбулентными пульсациями, то этот метод позволяет найти эйлеров интегральный масштаб $\Lambda_f = \bar{U} \mathcal{J}_E$.

Микромасштаб λ может быть определен с помощью соприкасающейся в вершине корреляционной кривой параболы. Основное требование при этом состоит в том, чтобы была точно известна форма корреляционной кривой вблизи ее вершины. В предыдущем параграфе было показано, что, когда коэффициент корреляции близок к единице, точное измерение корреляции является весьма непростой задачей. Поэтому было бы очень желательно иметь для определения λ другой способ.

Таунсенду [19] и на этот раз удалось найти довольно простой метод измерения микромасштаба λ_f . Для турбулентного поля, осредненная скорость которого $\bar{U}$ постоянна и велика по сравнению с турбулентными пульсациями, этот метод является прямым. При этом Таунсенд воспользовался соотношениями

$$\frac{2}{\lambda_f^2} = - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \right]_{x_1=0} = \frac{1}{u'^2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 = \frac{1}{\bar{U}^2 u'^2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2.$$

Таким образом, величина λ_f может быть измерена посредством введения в электронную схему дифференцирующей цепи.

Повторное дифференцирование позволило бы измерить также величину

$$\left[\frac{\partial^4 f}{\partial x_1^4} \right]_{x_1=0} = \frac{1}{\bar{U}^4 u'^2} \overline{\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \right)^2}$$

и т. д.

Лауфер [27] и Липман [28] предложили метод определения λ_f по среднему числу N_0 нулей пульсации u_1 в единицу времени:

$$\frac{1}{\lambda_f} = \frac{\pi N_0}{\bar{U} \sqrt{2}}. \quad (2.53)$$

Это соотношение может быть доказано весьма простым путем для того случая, когда пульсация u_1 представляет собой чистую гармонику

$$u_1 = u_1^* \sin \frac{2\pi t}{T},$$

где T — период. Число N_0 нулей пульсации u_1 в единицу времени составляет $N_0 = 2/T$. Теперь можно выразить период T через u_1 и du_1/dt . Однако целесообразнее выразить T через $(u_1^2)^{1/2}$ и $\left[\left(\frac{du_1}{dt} \right)^2 \right]^{1/2}$, поскольку в этом случае получается более простое выражение. Кроме того, при реальной турбулентности u_1 и du_1/dt являются статистическими величинами, в качестве средних значений которых могут быть взяты, как известно, среднеквадратичные величины. Поскольку

$$\sqrt{\overline{u_1^2}} = \frac{u^*}{\sqrt{2}}$$

и

$$\sqrt{\overline{\left(\frac{du_1}{dt} \right)^2}} = \frac{2\pi u^*}{T \sqrt{2}},$$

то отсюда следует, что

$$N_0 = \frac{2}{T} = \frac{\sqrt{\overline{\left(\frac{du_1}{dt} \right)^2}}}{\pi \sqrt{\overline{u_1^2}}} = \bar{U} \frac{\sqrt{\overline{\left(\frac{du_1}{dx_1} \right)^2}}}{\pi \sqrt{\overline{u_1^2}}}. \quad (2.54)$$

Лауфер и Липман показали, что точно такое же выражение можно получить и для случая реальной турбулентности при условии, если u_1 и du_1/dx_1 имеют гауссово распределение плотности вероятности и $u_1(du_1/dx_1) = 0$. Последнее условие выполняется в случае однородной турбулентности (см. главу 1). Таунсендом [19] было

обнаружено, что при изотропной турбулентности распределение плотности вероятности u_1 практически является гауссовым, но что в отношении du_1/dx_1 этого сказать нельзя; распределение этой величины, по опытам Таунсенда, определенно является слабо асимметричным.

Но в главе 1 было показано, что для однородной турбулентности справедливо соотношение

$$\frac{2}{\lambda_f^2} = \frac{\overline{(du_1/dx_1)^2}}{\overline{u_1^2}}.$$

Подстановка его в формулу (2.54) дает

$$\frac{1}{\lambda_f} = \frac{\pi N_0}{\overline{U} \sqrt{2}}.$$

В главе 3 будет показано, что при изотропной турбулентности

$$\lambda_f = \lambda_g \sqrt{2}$$

и, следовательно, соответствующее соотношение для масштаба диссипации λ_g запишется так:

$$\frac{1}{\lambda_g} = \frac{\pi N_0}{\overline{U}}. \quad (2.53a)$$

Экспериментальная методика определения числа нулей пульсации u_1 в принципе очень проста. Осциллограмма u_1 изображается на экране катодно-лучевой трубки. Перед этой трубкой устанавливается диск с узкой щелью, которая соответствует нулевой линии осциллограммы. Всякий раз, когда u_1 принимает нулевое значение, световой луч катодно-лучевой трубки проходит через щель и падает на фотоэлемент. Генерируемый при этом импульс напряжения подается в электронную счетную цепь.

Липман и Робинзон [59] разработали метод и создали аппаратуру применительно к этому методу, который позволяет определять плотность вероятности какой-либо статистической величины посредством счета импульсов. Подсчет нулей — частный случай этого метода; по плотности вероятности возможно также находить осредненные значения различных степеней этой функции, зная соответствующие моменты функции плотности вероятности. Применение этого метода для измерения плотности вероятности u_1 и du_1/dt при изотропной турбулентности показало, что между этими двумя плотностями вероятности может существовать некоторая статистическая зависимость. Однако полученных данных еще недостаточно для объяснения какого бы то ни было различия между значениями λ_f , измеренными методом подсчета нулей и каким-либо другим способом.

§ 2.5. Измерение пульсаций температуры и концентрации термоанемометром; метод постоянного тока

Возможность измерения пульсаций температуры в газе при помощи термоанемометра обеспечивается тем, что, во-первых, разность температур нити и газа зависит от пульсаций температуры газа и, во-вторых, свойства газа в пленке вокруг нити изменяются в зависимости от температуры газа. В § 2.3 было показано, что из двух коэффициентов — A и B — в формуле (2.7) величина A особенно чувствительна к изменению температуры. Однако, как мы увидим ниже, при нормальных условиях работы термоанемометра чувствительность нити к пульсациям температуры газа определяется, в основном, непосредственным влиянием разности температур нити и газа, а не изменением коэффициента A .

Для случая принятой выше линейной зависимости коэффициента теплопроводности газа от температуры было получено (см. § 2.3) следующее выражение для коэффициента A :

$$A_f = A_g \left[1 + \frac{a_1}{2(a + a_1\theta_g)} (\theta_w - \theta_g) \right]. \quad (2.36)$$

Поскольку A_g тоже рассматривается здесь как пульсирующая величина, то лучше ввести характерную температуру θ_0 и величину A_0 , отнесенную к этой температуре. Тогда выражение для A_f запишется следующим образом:

$$A_f = \frac{A_0}{a + a_1\theta_0} \left[a + \frac{a_1}{2} (\theta_w - \theta_g) \right] + \frac{a_1 A_0}{a + a_1\theta_0} \theta_g, \quad (2.55)$$

где

$$A_0 = 0,42 \frac{\epsilon \pi l}{b R_0} \text{Pr}^{0,20} (a + a_1\theta_0).$$

Подставляя это выражение в уравнение (2.7), получаем

$$\frac{I^2 R_w}{R_w - R_g} = \frac{A_0}{a + a_1\theta_0} \left[a + \frac{a_1}{2} (\theta_w - \theta_g) \right] + \frac{a_1 A_0}{a + a_1\theta_0} \theta_g + B \sqrt{U}. \quad (2.56)$$

Положим, как и прежде, что

$$R_w = \bar{R}_w + r_w, \quad R_g = \bar{R}_g + r_g, \quad \theta_g = \bar{\theta}_g + \theta_g, \quad U = \bar{U} + u.$$

Тогда из (2.56), пренебрегая членами, нелинейными относительно r_w , r_g , θ_g и u , находим

$$\begin{aligned} \frac{I^2 r_w}{\bar{R}_w - \bar{R}_g} = & \left[\frac{\bar{A}_f + B \sqrt{\bar{U}}}{\bar{R}_w - \bar{R}_g} + \frac{A_0 a_1}{2b(a + a_1\theta_0) R_0} \right] r_w + \\ & + \left[\frac{A_0 a_1}{2(a + a_1\theta_0)} - \frac{\bar{A}_f + B \sqrt{\bar{U}}}{\bar{R}_w - \bar{R}_g} b R_0 \right] \theta_g + B \sqrt{\bar{U}} \frac{u}{2\bar{U}}, \end{aligned}$$

где $\bar{A}_f$ — осредненная величина выражения (2.55).

Но при нормальных условиях работы термоанемометра и для геометрических размеров нитей, обычно применяемых при измерениях турбулентности, оказывается, что величина

$$\frac{A_0 a_1}{2b(a + a_1 \theta_0) R_0} \ll \frac{\bar{A}_f + B \sqrt{\bar{U}}}{\bar{R}_w - \bar{R}_g},$$

т. е. составляет около 10% или еще меньше. Пренебрегая малыми членами, упростим предшествующее уравнение следующим образом:

$$\frac{I^2 r_w}{\bar{R}_w - \bar{R}_g} = \frac{\bar{A}_f + B \sqrt{\bar{U}}}{\bar{R}_w - \bar{R}_g} r_w - \frac{\bar{A}_f + B \sqrt{\bar{U}}}{\bar{R}_w - \bar{R}_g} b R_0 \theta_g + B \sqrt{\bar{U}} \frac{u}{2\bar{U}},$$

или

$$\frac{I^2 \bar{R}_g r_w}{(\bar{R}_w - \bar{R}_g)^2} = \frac{b I^2 \bar{R}_w R_0}{(\bar{R}_w - \bar{R}_g)^2} \theta_g - B \sqrt{\bar{U}} \frac{u}{2\bar{U}}.$$

Отсюда

$$e = I r_w = I \frac{b \bar{R}_w R_0}{\bar{R}_g} \theta_g - \frac{(\bar{R}_w - \bar{R}_g)^2}{2 I \bar{R}_g} B \sqrt{\bar{U}} \frac{u}{\bar{U}}. \quad (2.57)$$

Введем в рассмотрение чувствительность к пульсациям скорости s , определенную уравнением (2.12), и чувствительность к пульсациям температуры s_θ , которая определяется формулой

$$\sqrt{\bar{e}^2} = s_\theta \sqrt{\bar{\theta}_g^2}. \quad (2.58)$$

Тогда соотношение (2.57) примет вид

$$e = -s u + s_\theta \theta_g, \quad (2.59)$$

где

$$s_\theta = I \frac{b \bar{R}_w R_0}{\bar{R}_g}. \quad (2.60)$$

Хотя величины s и s_θ можно вычислить, взяв для B выражение (2.9), тем не менее обычно пользуются более надежным способом экспериментального определения этих величин.

Соотношение (2.59) является фундаментальным для измерения турбулентных пульсаций температуры, а также их корреляций с пульсациями скорости.

Запишем прежде всего среднеквадратичное значение выражения (2.59):

$$\bar{e}^2 = s^2 \bar{u}^2 + s_\theta^2 \bar{\theta}_g^2 - 2 s s_\theta \overline{u \theta_g}. \quad (2.61)$$

Если бы можно было добиться, чтобы $s \ll s_\theta$, то тогда уравнение (2.61) свелось бы к соотношению, которое дает непосредственно

величину $\bar{\theta}_g^2$. Если бы, с другой стороны, представилось возможным сделать $s \gg s_g$, то тогда мы смогли бы получить из (2.61) величину $\bar{u}^2$. В первом случае величина u должна быть, самое большее, того же порядка, что и θ_g ; во втором случае должно выполняться условие $\theta_g \ll u$. Таким образом, для обеспечения возможности использования обоих методов можно потребовать, чтобы u и θ_g были одинаковыми по порядку величинами.

Обеспечив $s \ll s_g$, имеем $e \approx s_g \theta_g$; это позволяет получить осциллограмму пульсаций температуры.

Но добиться того, чтобы $s \ll s_g$, можно в том случае, когда разность $\bar{R}_w - \bar{R}_g$ достаточно мала. Этот вывод нельзя получить непосредственно из выражений для s и s_g , но его не трудно проверить, если определить численные значения величин, содержащихся в этих выражениях, для соответствующих рабочих условий.

Когда величина $\bar{R}_w - \bar{R}_g$ выбирается достаточно малой, то термоанемометр работает, как термометр сопротивления.

Наоборот, величину s можно сделать большой по сравнению с s_g , выбрав большую величину $\bar{R}_w - \bar{R}_g$. Однако это не всегда представляется возможным, особенно когда $\bar{R}_g$ и $\bar{U}$ велики, потому что величина $\bar{R}_w$ ограничена максимально допустимой температурой нити.

Чтобы обойти это затруднение, мы можем получить все три неизвестные в правой части соотношения (2.61), придавая каждой из величин s и s_g три различных значения. Это вполне осуществимо, так как s и s_g зависят от $\bar{\theta}_w/\bar{\theta}_g$ различным образом, благодаря чему термоанемометр может работать при трех уровнях температуры. Другой, правда, менее практичный способ состоит в использовании трех нитей с различными диаметрами, поскольку s и s_g зависят от диаметра нити. Очевидно, что при этом должна быть известна зависимость s и s_g от $\bar{\theta}_w/\bar{\theta}_g$ или от диаметра нити. По трем значениям $\bar{e}^2$, полученным при работе либо с одной нитью при трех различных уровнях температуры, либо с тремя нитями, имеющими различные диаметры, можно определить величины $\bar{u}^2$, $\bar{\theta}_g^2$ и $\bar{u} \bar{\theta}_g$.

Помещая нить под некоторым углом к направлению скорости осредненного потока $\bar{U}$, можно измерить величины $\bar{u}_2^2$ и $\bar{u}_2 \bar{\theta}_g$ или $\bar{u}_3^2$ и $\bar{u}_3 \bar{\theta}_g$. На практике это можно осуществить, например, при помощи двух идентичных нитей, расположенных в форме буквы Х.

Выходной сигнал одной нити запишется как

$$e_1 = -(s_1)_1 u_1 - (s_2)_1 u_2 + s_g \theta_g,$$

а выходной сигнал второй нити — как

$$e_{II} = -(s_1)_{II} u_1 + (s_2)_{II} u_2 + s_3 \theta_g.$$

Из этих соотношений непосредственно получаем величины $\overline{u_1^2}$ и $\overline{u_2^2}$ [см. уравнение (2.51)], так как для идентичных нитей $(s_1)_I = (s_1)_{II}$ и $(s_2)_I = (s_2)_{II}$, а средняя разность квадратов выходных сигналов дает

$$\overline{e_I^2} - \overline{e_{II}^2} = -4s_2 s_3 \overline{u_2 \theta_g} + 4s_1 s_2 \overline{u_1 u_2}.$$

Опять-таки, обеспечивая $s_3 \gg s$ (разность $\bar{R}_w - \bar{R}_g$ мала; термоанемометр работает в режиме термометра сопротивления), можно получить величину $\overline{u_2 \theta_g}$; корреляция $\overline{u_1 u_2}$ может быть найдена посредством удовлетворения неравенству $s_3 \ll s$.

При работе нитей на двух различных уровнях температуры, когда можно составить два независимых уравнения для $\overline{u_2 \theta_g}$ и $\overline{u_1 u_2}$, оказывается также возможным вычислить и корреляции $\overline{u_2 \theta_g}$ и $\overline{u_1 u_2}$.

Если величина $\overline{\theta_g^2}$ может быть получена как прямой выходной сигнал термоанемометра, то при помощи подходящего фильтра можно определить и ее спектральное распределение.

Для измерения пространственных корреляций между пульсациями скорости и температуры в двух точках поля течения можно воспользоваться либо двумя отдельными нагретыми нитями (при измерении осевой компоненты u_1 и θ_g), либо двумя парами нитей, расположенных в форме буквы X (при измерении поперечных компонент u_2 и u_3 и θ_g). Однако при этом должно быть сделано предположение, что средние величины скорости и температуры однородны.

Так, для измерения корреляций между компонентами u_1 в двух точках A и B и корреляций между пульсациями θ_g в качестве исходных соотношений следует воспользоваться равенствами

$$e_A = -s_A (u_1)_A + (s_3)_A (\theta_g)_A, \quad e_B = -s_B (u_1)_B + (s_3)_B (\theta_g)_B.$$

Вследствие предположения об однородности поля течения и идентичности обеих нитей, $s_A = s_B$ и $(s_3)_A = (s_3)_B$.

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \overline{(e_A + e_B)^2} - \overline{(e_A - e_B)^2} &= 4s_3^2 \overline{(\theta_g)_A (\theta_g)_B} + 4s^2 \overline{(u_1)_A (u_1)_B} - \\ &\quad - 4ss_3 [\overline{(\theta_g)_A (u_1)_B} + \overline{(\theta_g)_B (u_1)_A}]. \end{aligned}$$

Производя измерения при трех различных температурах нити, можно определить $\overline{(\theta_g)_A (\theta_g)_B}$ и $\overline{(u_1)_A (u_1)_B}$. Перекрестные корреляции между пульсациями температуры и скорости в двух точках, хотя

они и получаются автоматически при использовании этого метода, лишены физического смысла и поэтому не имеют практического значения.

Ясно, что для получения $(\theta_g)_A(\theta_g)_B$ или $(u_1)_A(u_1)_B$ мы вновь можем сделать так, чтобы соответственно $s_\theta \gg s$ или $s_\theta \ll s$.

Когда корреляция $(\theta_g)_A(\theta_g)_B$ получена для различных расстояний между двумя точками, то можно определить и пространственный масштаб пульсаций температуры.

Измерение пульсаций температуры в турбулентном потоке впервые было проведено Корсином [29]. В основу своего теоретического анализа Корсин положил уравнение переноса тепла от нити к движущемуся газу, предложенное Кингом; поэтому в качестве температуры газа он взял температуру окружающего газа снаружи пограничного слоя, а не пленочную температуру. В соответствии с этим Корсин получил выражение для s_θ , отличное от того, которое определяется уравнением (2.60). Но поскольку в этом методе величина s_θ определяется экспериментально, то это отличие не приводит к практически важным последствиям.

Измерение пульсаций концентрации. Принципиальная возможность измерения пульсаций концентрации посредством термоанемометра обусловлена главным образом зависимостью k_g и ρ_g от рода газа. В этом случае из уравнения (2.7) снова можно вывести соотношение вида

$$e = -su - s_\gamma \gamma,$$

где s_γ — чувствительность нити к пульсациям концентрации γ одного газа в другом.

На первый взгляд может показаться, что в этом случае должна была бы применяться точно такая же методика, как и для измерения пульсаций температуры. Однако между двумя этими случаями имеется существенное различие. Чувствительности s и s_θ зависят от температуры неодинаково; поэтому при работе с различными температурами нити получают различные и независимые соотношения. Но при измерении концентрации как s , так и s_γ изменяются пропорционально температуре нити; поэтому при работе на различных уровнях температуры нити нельзя получить независимые уравнения. Такие независимые уравнения могут быть получены только при использовании нитей с различными диаметрами. К счастью, зависимость обоих коэффициентов A и B от диаметра нити оказывается очень сильной, поэтому, чтобы подходить для этой цели, диаметры нитей должны отличаться совсем незначительно. Однако очевидно, что измерения с помощью двух различных нитей, расположенных одна за другой, являются довольно сложными.

В работе [29] Корсин описывает методы измерения статистических величин в турбулентном поле концентрации.

§ 2.6. Метод постоянной температуры

В этом методе электрическое сопротивление нити и соответственно ее температура поддерживаются, насколько это возможно, постоянными. Любое незначительное изменение температуры и, следовательно, электрического сопротивления, связанное с охлаждающим воздействием пульсаций турбулентного потока, немедленно компенсируется при помощи электрической цепи обратной связи, которая изменяет электрический ток через нить, как только происходит изменение электрического сопротивления. При этом цепь обратной связи срабатывает почти мгновенно.

Обозначим через r_w слабое изменение электрического сопротивления, а через $g_{кр}$ крутизну характеристики электрического контура. Тогда связь между компенсирующим электрическим током i и сопротивлением r_w определится формулой

$$i = -g_{кр} I r_w. \quad (2.62)$$

Чувствительность термоанемометра, работающего при постоянном электрическом сопротивлении, к пульсациям скорости может быть определена, как и соответствующая чувствительность в методе постоянного тока, из соотношения (2.7).

Пусть при электрическом сопротивлении, существенно постоянном и равном $\bar{R}_w$,

$$I = \bar{I} + i, \quad U = \bar{U} + u. \quad (2.63)$$

Положим, далее, что мы имеем дело только с малыми пульсациями; тогда из уравнения (2.7) получим

$$\bar{I}^2 \bar{R}_w + 2i \bar{I} \bar{R}_w = (\bar{R}_w - R_g) (A + B \sqrt{\bar{U}}) + (\bar{R}_w - R_g) B \sqrt{\bar{U}} \frac{u}{2\bar{U}},$$

откуда

$$i = \frac{\bar{R}_w - R_g}{4\bar{I}\bar{R}_w} B \sqrt{\bar{U}} \frac{u}{\bar{U}}$$

и

$$e = \bar{R}_w i = \frac{\bar{R}_w - R_g}{4\bar{I}} B \sqrt{\bar{U}} \frac{u}{\bar{U}} = s_{п. т.} u, \quad (2.64)$$

где величина

$$s_{п. т.} = \frac{\bar{R}_w - R_g}{4\bar{I}} \frac{B \sqrt{\bar{U}}}{\bar{U}}$$

представляет собой чувствительность при работе на режиме постоянной температуры.

Из сравнения этого выражения с аналогичным уравнением (2.13) для случая метода постоянного тока следует, что

$$s_{п. т.} = \frac{1}{2} \frac{R_g}{\bar{R}_w - R_g} s, \quad (2.65)$$

т. е. при $\bar{R}_w/R_g > 3/2$ чувствительность метода постоянной температуры ниже чувствительности метода постоянного тока.

Мы предположили, что электрическое сопротивление остается постоянным. Однако в действительности наблюдаются изменения электрического сопротивления, хотя они и чрезвычайно малы. Эти изменения связаны с изменениями электрического тока в соответствии с уравнением (2.62).

Чтобы исследовать динамическую характеристику термоанометра, необходимо рассмотреть эти малые изменения электрического сопротивления. Таким образом, запишем

$$R_w = \bar{R}_w + r_w. \quad (2.66)$$

Подставляя уравнения (2.63) и (2.66) в уравнение теплового равновесия (2.14), после несложных алгебраических преобразований, опуская квадратичные члены с малыми пульсациями i , r_w и u , получаем

$$\bar{I}^2 r_w + 2\bar{I}\bar{R}_w i = (A + B\sqrt{\bar{U}})r_w + (\bar{R}_w - R_g)B\sqrt{\bar{U}} \frac{u}{\bar{U}} + eC_w \frac{d\theta_w}{dt}.$$

Пользуясь равенством $\theta_w = r_w/R_0 b$ и соотношением (2.62), далее находим

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} + \frac{bR_0}{eC_w} (A + B\sqrt{\bar{U}} - \bar{I}^2 + 2\bar{I}^2 \bar{R}_w g_{кр}) i = \\ = \frac{b g_{кр} \bar{I} R_0 (\bar{R}_w - R_g)}{eC_w} B\sqrt{\bar{U}} \frac{u}{2\bar{U}}. \end{aligned}$$

Из этого выражения получаем следующую формулу для постоянной времени при работе по методу постоянной температуры:

$$M_{п. т.} = \frac{eC_w}{bR_0 (A + B\sqrt{\bar{U}} - \bar{I}^2 + 2\bar{I}^2 \bar{R}_w g_{кр})},$$

или, поскольку $A + B\sqrt{\bar{U}} - \bar{I}^2 = \frac{R_g \bar{I}^2}{\bar{R}_w - R_g}$,

$$M_{п. т.} = \frac{eC_w}{bR_0 \frac{R_g}{\bar{R}_w - R_g} \bar{I}^2 \left(1 + 2 \frac{\bar{R}_w - R_g}{R_g} \bar{R}_w g_{кр} \right)}.$$

Сравнение с (2.18) показывает, что

$$M_{п.т.} = \frac{M}{1 + 2 \frac{\bar{R}_w - R_g}{R_g} \bar{R}_w g_{кр}}. \quad (2.67)$$

Постоянная времени при работе по методу постоянной температуры значительно меньше, чем для метода постоянного тока. Полагая, к примеру, что $R_w/R_g = 2$ и $R_w = 10$ ом, при достаточно малой крутизне характеристики контура $g_{кр} = 10$ мо имеем $M_{п.т.} = M/200$. Это относительно низкое значение постоянной времени делает метод постоянной температуры пригодным для измерения в большинстве представляющих практический интерес турбулентных потоков, не прибегая к компенсации термического запаздывания.

Благодаря постоянной температуре нити, константы A и B , содержащиеся в уравнении (2.7), и в самом деле являются постоянными, т. е. не зависят от турбулентных пульсаций. Это обеспечивает методу постоянной температуры значительные преимущества, когда приходится производить измерения в турбулентных потоках с большой относительной интенсивностью турбулентности.

Этот метод был предложен Циглером [30] еще в 1934 году. Однако он не выдержал конкуренции с методом постоянного тока из-за возможности возникновения неустойчивых колебаний, на проблему которых Циглер указал ранее.

К методу постоянной температуры возвратились снова лишь в период второй мировой войны и после нее. Оссовскому [31] и Веске [32] в США и Турнье, Лорансо, Обэ и Сеньерэну [33] во Франции удалось создать достаточно устойчивую систему обратной связи. В частности, применение контура с несущей частотой явилось особенно ценным вкладом в обеспечение устойчивой и надежной работы по сравнению с более ранними методами, при которых несбалансированное напряжение от моста с нагретой нитью усиливалось при помощи усилителей с непосредственной связью и подавалось на мост, так что увеличение температуры нити приводило к падению тока, нагревающего нить.

С другой стороны, необходимая при использовании этого метода электронная аппаратура является значительно более сложной, нежели применяемая в методе постоянного тока. Поэтому в настоящее время методом постоянной температуры пользуются только в тех случаях, когда требуется измерить большие пульсации [34], а метод постоянного тока по причинам, рассмотренным в предыдущих параграфах, оказывается непригодным.

Однако надо ясно представлять себе, что в случае сильных пульсаций скорости возникает еще одно затруднение, связанное с нелинейностью характеристики термоанемометра, определяемой

уравнением (2.7), относительно скорости U . Правда, можно показать, что метод постоянной температуры дает намного меньшее искажение. В случае метода постоянной температуры ошибка в 10%, указанная в § 2.3 для изотропной турбулентности при $u'/U = 0,2$, уменьшается примерно в три раза. Более того, при использовании метода постоянной температуры представляется возможным применить линеаризующую цепь, амплитудная характеристика которой имеет обратную кривизну по сравнению с характеристикой термоанемометра; благодаря этому можно добиться практически линейной связи между выходным напряжением и скоростью U . Тогда указанное выше почти троекратное уменьшение ошибки можно сократить еще в три раза. Применение подобной линеаризующей цепи было предложено Циглером [30], а пример практического использования ее был дан Веске [32].

Различные авторы, например Коважный [36] и Оссовский [31], указывали, что метод постоянной температуры приводит к сильному уменьшению отношения сигнал/шум. Этот вывод справедлив для собственно управляющего контура, но вне этого контура можно использовать фильтр низких частот, который пропускает только частоты ниже наивысшей частоты турбулентности, благодаря чему удастся добиться заметного улучшения работы аппаратуры в этом отношении [85].

§ 2.7. Ограничения термоанемометра

Хотя термоанемометр и является в настоящее время пока еще наиболее распространенным прибором для измерения турбулентности, он все же имеет определенные ограничения. Некоторые из этих ограничений уже ясно вырисовывались в предыдущих параграфах. Сюда относится и нелинейный характер зависимости переноса тепла от скорости и температуры. Как нелинейный температурный эффект, так и влияние кривизны характеристики по скорости могут быть значительно ослаблены при использовании метода постоянной температуры, особенно при добавлении линеаризующей цепи, хотя при этом возникают трудности в создании надежной электронной схемы.

Другое ограничение, уже упоминавшееся выше, накладывается «разрешающей способностью» в направлении нити, обусловленной ее конечной длиной. Разрешающая способность в направлении течения ограничивается постоянной времени нагретой нити. Следуя Коважному [36], можно ввести разрешающую длину нити $l_{\text{раз}} = U/2n_{\text{max}}$, где n_{max} — максимальная частота усилителя, при которой еще не наблюдается заметного ухудшения характеристики нити. Эта разрешающая длина должна быть мала по сравнению с размером микровихрей. Поскольку величина n_{max} обратно пропорциональна постоянной времени термоанемометра, длина $l_{\text{раз}}$ оказывается прямо пропорциональной ей.

При очень высокой скорости потока (скажем, $U > 100$ м/сек) могут наблюдаться крайне мелкие вихри. Значит, чтобы разрешающая длина по сравнению с размером этих вихрей оставалась малой, следует обеспечивать малые значения постоянной времени; поэтому желательно применять тонкие нити. В то же время для обеспечения прочности нити в таком высокоскоростном потоке ее нельзя делать слишком тонкой. Кроме того, детали крепления и их аэродинамическое взаимодействие с нитью могут вызвать возмущения картины течения, сравнимые по своим размерам с наиболее мелкими вихрями.

Другая трудность, которая наиболее ощутима в случае тонких нитей, состоит в том, что нагретая нить чувствительна к отложению и ударному воздействию мелких частиц (пыли); в связи с этим может произойти изменение значений тарировочных параметров нити. В таком случае нити должны быть зачищены и заново протарированы. Эта зачистка и повторная тарировка могут представлять значительное неудобство, когда интервалы времени, через которые они становятся необходимыми, очень коротки. Когда измерения турбулентности проводятся в аэродинамической трубе замкнутого типа, можно обеспечить очистку воздуха в этой трубе. Коллис [37] описывает один простой способ очистки воздуха посредством установки металлической сетки, сплетенной из очень тонких проволочек, в подходящем сечении трубы. Поскольку воздух рециркулирует, эффективность улавливания частиц не обязана быть очень высокой, но тем не менее из воздуха в конечном счете должны быть обязательно удалены частицы, размеры которых намного меньше 1 мк. Даже когда воздух очищается этим способом, после нескольких часов работы все-таки необходимо зачищать нити, ибо в систему всегда просачивается неочищенный воздух и к тому же эффективность этого метода очистки воздуха никогда не достигает 100%.

Общепринятый метод удаления пыли с нити состоит в очень тщательной очистке ее с помощью щеточки. Чтобы при этом избежать разрушения нити, требуется некоторый опыт. Однако этот метод оказывается непригодным, когда отложение на нити носит смолистый характер. Виатту [38] удалось успешно применить новый метод, отмывая нить термоанемометра в течение получаса в жидкости, обладающей свойствами растворителя (например, в метиловом спирте), и слегка взбалтывая эту жидкость акустическими колебаниями с частотой от 15 до 60 гц при помощи громкоговорителя. Этим способом можно удалить от 80 до 90% пыли. Чувствительность нагретой нити, периодически подвергаемой подобной обработке, по имеющимся данным, остается постоянной с точностью до 2%.

До сих пор мы рассматривали применение термоанемометра для измерения турбулентности только в воздухе или в других газах. К сожалению, его применение ограничивается газами, так как для измерений в капельных жидкостях термоанемометр оказывается зна-

чительно менее подходящим. Дело в том, что рабочая температура нити из-за возможности испарения и образования окалины должна быть при этом очень низкой.

Согласно Мидлбруку и Пире [39], при этих условиях может также происходить электролиз, а это явление повлечет за собой много неприятностей. Конечно, возможно также образование осадков даже в довольно чистых жидкостях. Кроме того, чтобы нить, применяемая в условиях капельной жидкости, обладала достаточной прочностью, требуются значительно более массивные конструкции, с более толстыми и более длинными нитями; а это отрицательно скажется на чувствительности термоанемометра и постоянной времени. Тем не менее термоанемометр находит применение для измерений в капельных жидкостях, правда, в большинстве случаев применение термоанемометра ограничивается только измерениями осредненной скорости (например, в пограничном слое), характеристик явления перехода или турбулентности, обладающей довольно низкой частотой [40].

Вернотт [41] выдвинул дополнительные критические возражения, которые носят принципиальный характер. Применение термоанемометра основано на законе теплообмена, происходящего при стационарных условиях течения жидкости, в то время как при измерении турбулентности нить подвергается воздействию потока, являющегося по своей природе нестационарным. Но перенос тепла от нити к движущейся жидкости зависит от картины течения, включая и турбулентные движения; однако о них пока еще ничего не известно. Вернотт предлагает более полно проанализировать влияние этих условий. В этой связи следует указать на два важных фактора: 1) влияние пульсаций общей картины течения около нити и 2) влияние пульсаций потока в пограничном слое нити. Когда турбулентные пульсации малы по сравнению с осредненной скоростью, первый из этих факторов становится несущественным, так как картина течения будет определяться главным образом именно этим осредненным течением и поэтому любое проявление нестационарности потока около нити не представляет само по себе первостепенного интереса, коль скоро речь идет о картине течения. Однако влияние второго фактора может оказаться более серьезным. Исследование его влияния на теплообмен в ламинарном пограничном слое пульсирующего потока было проведено Лайтхиллом [84]. В применении к термоанемометру полученные результаты показывают, что период запаздывания, обусловленный тепловой инерцией нити, особенно в случае метода постоянного тока, возрастает под действием теплоинерционных эффектов в пограничном слое. Однако для обычных условий, при которых используется термоанемометр, это возрастание пренебрежимо мало.

В последнее время Лингом и Хаббардом [86] был предложен новый анемометр, который имеет большое сходство с термоанемометром. В качестве чувствительного элемента здесь используется

нагретая очень тонкая платиновая пленка. Эта пленка, длиной в 1 мм и шириной в 0,2 мм, наплавляется на стеклянную или керамическую державку, имеющую форму клина. По принципу работы этот анемометр аналогичен термоанемометру. Благодаря тому, что анемометр с нагретой пленкой обладает более высокими механическими свойствами, он значительно более пригоден для измерений в капельных жидкостях и в сверхзвуковом или в высокотемпературном потоке газа. По данным Линга и Хаббарда, этот анемометр менее чувствителен к загрязнению поверхности (например, пылью) и имеет, при одинаковых условиях работы, более высокое отношение сигнал/шум, нежели термоанемометр, особенно когда применяется метод постоянной температуры.

§ 2.8. Анемометр с электрическим разрядом

Другой метод, который дает возможность измерять турбулентность в газах, основан на свойствах вольтамперной характеристики электрического разряда между двумя электродами. Для электродов заданной формы при постоянном искровом промежутке эта характеристика зависит от природы газа, давления, температуры, влажности и скорости. Именно зависимость от скорости, которая при этом оказывается наиболее сильной, делает электрический разряд применимым для измерения скорости.

В этом методе обычно используются два тонких электрода с разрядным промежутком около 0,1 мм. В зависимости от приложенного напряжения и возникающего электрического тока различают несколько типов электрического разряда. При чрезвычайно слабом электрическом токе, менее 10^{-9} а, происходит так называемый «темновой», или таунсендовский, разряд; напряжение составляет при этом около 10 000 в. При повышении напряжения и возрастании тока до нескольких мка наблюдается переход к разряду со светящейся короной. Дальнейшее возрастание тока связано с повышением светимости. При токе порядка нескольких миллиампер светимость становится намного сильнее и разряд превращается в тлеющий. Переход от коронного разряда к тлеющему сопровождается довольно резким и существенным падением напряжения до нескольких сотен вольт. Кроме того, в области тлеющего разряда вольтамперная характеристика имеет отрицательный градиент.

Электрический разряд для технических целей впервые был применен, по-видимому, Томасом [42], который использовал разряд при создании безмембранного микрофона для радиовещания.

В 1934 году Линдвалл [43] воспользовался чувствительностью напряжения при тлеющем разряде к скорости газа для измерения турбулентности. По данным Линдвалла, наилучшими материалами для этой цели оказываются платина и сплав платины и иридия, для ко-

торых наблюдается относительно устойчивый разряд и хорошая воспроизводимость результатов; удовлетворительными качествами обладает также вольфрам.

Тлеющий разряд характеризуется светящейся зоной вблизи катода протяженностью в несколько десятых долей микрона с разностью потенциалов в 300 в и положительной зоной (столбом) с градиентом в 1500 в/см. Разрядный ток составляет от 10 до 30 ма.

Для измерения турбулентности Линдвалл использовал платиновые электроды диаметром 1,5 мм, разделенные искровым промежутком от 0,1 до 0,2 мм. Полная разность потенциалов между этими электродами составляла от 300 до 400 в. Как уже упоминалось, вольт-амперная характеристика имеет при этом отрицательный градиент.

Выше указывалось, что разряд чувствителен к скорости газа. При изменении скорости на 1 м/сек оказывается возможным получить разность потенциалов в 1 в. Это значительно больше, чем можно получить при использовании термоанемометра, в случае которого разность потенциалов порядка 0,01 в. Линдвалл считает это обстоятельство очень важным преимуществом, так как в этом случае требуется меньшее усиление. Другим важным преимуществом является то, что влияние факторов, соответствующих теплоинерционным эффектам термоанемометра, здесь весьма незначительно. Новый разряд устанавливается менее чем за 10^{-5} сек; следовательно, анемометр с тлеющим разрядом может реагировать на пульсации скорости с частотой вплоть до 10^5 сек $^{-1}$.

Линдвалл применил этот метод для измерения турбулентности в следе за круглым цилиндром и обнаружил удовлетворительное согласие с результатами измерений при помощи термоанемометра с компенсацией. В течение и после окончания второй мировой войны Фукс [44–46] в Германии проводил широкое исследование применения анемометра с коронным разрядом для измерения турбулентности; аналогичные опыты проводились во Франции Агостини [47].

В работе Агостини применялись конструкции с двумя небольшими сферическими электродами, а также со сферическим анодом, расположенным в центре кольцевого катода. Фуком использовались сферические платиновые электроды. Миниатюрные сферические электроды могут быть весьма просто изготовлены посредством оплавления концов платиновых проволок в электрическом разряде.

Фукс [44, 45] и Вернер [48] провели также экспериментальное исследование чувствительности разряда к изменениям давления, температуры и влажности, а Фуком [44], кроме того, с помощью радиоактивных веществ было исследовано благоприятное влияние предварительной ионизации.

В опытах Фука, Агостини и Вернера применялось большее расстояние между электродами; при этом вольт-амперная характеристика имела положительный градиент.

В работе [46] Фуксом было показано, что этим методом можно измерять не только суммарную интенсивность турбулентности, но также и интенсивность турбулентности, соответствующую компонентам пульсаций. Эта возможность обусловлена чувствительностью анемометра

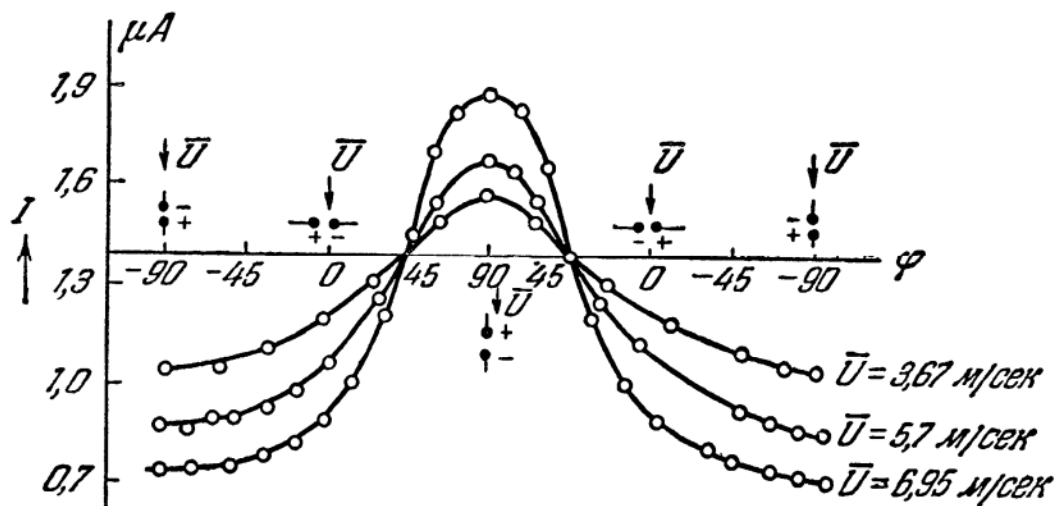


Рис. 2.4. Зависимость катодного тока коронного разряда от направления течения [46].

с коронным разрядом к направлению скорости потока газа. На рис. 2.4 изображена зависимость катодного тока в коронном разряде от направления потока при различных значениях скорости. В этом случае использовались сферические электроды диаметром 0,5 мм, расстояние между которыми составляло 6 мм.

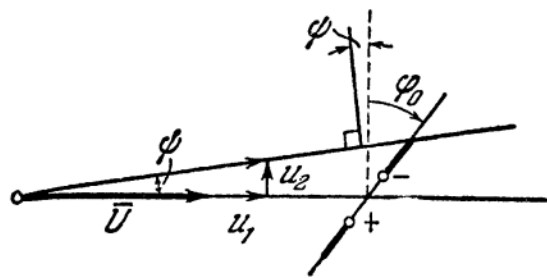


Рис. 2.5. Измерение компонент турбулентных пульсаций скорости.

Связь между электрическим током I , скоростью газа U и направлением потока φ может быть записана в виде

$$I = \frac{\partial I}{\partial U} U + \frac{\partial I}{\partial \varphi} \varphi, \quad (2.68)$$

здесь $\frac{\partial I}{\partial U}$ и $\frac{1}{U} \frac{\partial I}{\partial \varphi}$ являются функциями только φ .

Из анализа рис. 2.4 можно сделать вывод, что $\frac{1}{U} \frac{\partial I}{\partial \varphi} = 0$ при $\varphi = \pm 90^\circ$ и что $\frac{\partial I}{\partial U} = 0$ при $\varphi \approx 45^\circ$. Точная величина этого критического угла зависит от размеров электродов, а также от напряжения и должна определяться экспериментально.

Пусть φ_0 определяет положение анемометра относительно направления скорости осредненного потока $\bar{U}$ (см. рис. 2.5) в плоскости, проходящей через компоненты u_1 и u_2 . Если пульсации считать

малыми, то эффективная скорость представится формулой

$$U_{\text{эфф}} = V(\bar{U} + u)^2 + u_2^2 + u_3^2 \approx \bar{U} \left(1 + \frac{u_1}{\bar{U}}\right). \quad (2.69)$$

Изменение направления потока ψ в случае малых пульсаций приближенно может быть записано как

$$\psi \approx \frac{u_2}{\bar{U}}. \quad (2.70)$$

Подставляя выражения (2.69) и (2.70) в (2.68), получаем

$$I = \bar{I} + i = \frac{\partial I}{\partial \bar{U}} \bar{U} \left(1 + \frac{u_1}{\bar{U}}\right) + \left(\frac{\partial I}{\partial \varphi}\right)_0 \left(\varphi_0 + \frac{u_2}{\bar{U}}\right),$$

откуда

$$i = \frac{\partial I}{\partial \bar{U}} u_1 + \left(\frac{\partial I}{\partial \varphi}\right)_0 \frac{u_2}{\bar{U}}. \quad (2.71)$$

Если установить сначала $\varphi_0 \approx 45^\circ$ и, стало быть, $\frac{\partial I}{\partial \bar{U}} = 0$, то величина i будет прямо пропорциональна u_2 . Если затем сделать $\varphi_0 = 90^\circ$, то величина i будет прямо пропорциональна u_1 , так как при этом $\left(\frac{\partial I}{\partial \varphi}\right)_0 = 0$.

Измерение третьей компоненты турбулентных пульсаций u_3 может быть осуществлено аналогичным способом, если расположить электроды в плоскости, проходящей через направления u_1 и u_2 .

§ 2.9. Метод электромагнитной индукции

Один из методов, целесообразность применения которых при измерении турбулентности в капельных жидкостях уже доказана, основан на принципе электромагнитной индукции. Как упоминалось выше, при измерении турбулентности в жидкостях термоанемометр имеет серьезные ограничения; поэтому метод электромагнитной индукции применительно к подобным измерениям является весьма привлекательной альтернативой.

Если жидкость слабо ионизована (такая жидкость должна быть электролитическим проводником, но проводимостью обладает даже такой слабый электролит, как водопроводная вода) и движется относительно электромагнитного поля с некоторой скоростью, то в ней будет индуцироваться электрическое поле. Напряженность этого индуцированного поля однозначно определяется компонентой скорости, перпендикулярной к электромагнитному полю, и оказывается прямо пропорциональной этой компоненте и напряженности электромагнитного поля.

Пусть U — компонента скорости, перпендикулярная к электромагнитному полю с напряженностью H ; тогда напряженность индуцированного электрического поля V , согласно закону Максвелла — Фарадея, определяется формулой

$$V = \frac{\mu}{c} HU,$$

где μ — относительная магнитная проницаемость жидкости, а c — скорость света.

Направление индуцированного поля перпендикулярно как к компоненте скорости U , так и к магнитному полю. Оно может быть определено по хорошо известному правилу левой руки.

Если в движущуюся жидкость на линии, параллельной направлению индуцированного электрического поля, ввести два электрода, зазор между которыми равен s , то возникающая при этом разность потенциалов на электродах E определится как

$$E = Vs = \frac{\mu}{c} HUs.$$

Колин [49] в 1936 году применил этот метод для измерения средней скорости потока жидкости в трубе при биологических исследованиях (течение крови в сосудах).

Большое значение имеет тот факт, что напряжение E является линейной функцией скорости U , а величина его чувствительна к направлению, ибо при этом напряжение E зависит только от компоненты скорости, перпендикулярной к воображаемой линии, проходящей через электроды, и к направлению электромагнитного поля.

Кроме того, связь между E и U не зависит от плотности, вязкости, температуры и электропроводности жидкости, а также от ее состава.

Электроды рекомендуется изготавливать из материалов, которые не подвержены воздействию кислоты и не поляризуются. В случае поляризуемых материалов должно применяться переменное электромагнитное поле; при этом для нейтрализации индуцированного переменного потенциала требуется компенсационный контур.

Представляется возможным либо подвергать воздействию электромагнитного поля все поле течения, либо вводить в поток относительно малый электромагнит, соединенный с парой электродов, по направлению, перпендикулярному к линии, проходящей через его полюсы.

В первом случае конструкция прибора значительно проще, но при этом, если поток не является равномерным во всем поле течения, следует учитывать влияние локально индуцированных токов. Распределение напряженности подобного локального электрического поля течения в круглой трубе было вычислено Тюрлеманом [50] как в слу-

чае ламинарного, так и турбулентного течения. Колин и Райхе [51] теоретически показали, что эти индуцированные токи могут быть учтены внесением определенной поправки.

Второй метод был также применен Колином [52] для измерения локальной скорости потока в глубоком канале. Хотя чувствительный элемент, состоящий из электромагнита и электродов, и был сделан весьма миниатюрным (полная длина магнита 23 мм, расстояние между полюсами магнита 1 мм, и диаметр полюсов тоже 1 мм), этот прибор все же является довольно крупным, чтобы им можно было измерять турбулентность, масштаб которой не очень велик.

В таком случае для большинства измерений турбулентности этот второй метод оказывается непригодным. Поэтому для измерения турбулентности Гроссман [53, 54] обратился к первому методу и разработал его вплоть до создания вполне надежной аппаратуры. Им были проведены измерения в потоке в прямой круглой трубе, которая была изготовлена из люцита *) и имела внутренний диаметр 43 мм; в качестве жидкости использовалась вода. Стационарное магнитное поле создавалось при помощи электромагнита постоянного тока с круглыми полюсами диаметром 150 мм и с зазором между ними в 50 мм. Так как в турбулентном потоке градиент скорости, благодаря которому возникают индуцированные локальные электрические токи, значителен лишь около стенки, то и возмущающее влияние этих токов на результаты измерения турбулентности будет иметь значение только в непосредственной близости от стенки.

Гроссман провел исследование с целью выяснения оптимального расстояния между электродами (в его опытах оно оказалось равным примерно 2,5 мм) и разработал систему коррекции для учета фона. Поскольку разность потенциалов между электродами чрезвычайно мала, будучи величиной порядка $10^{-4} \div 10^{-5}$ в, то необходимость коррекции фона вполне очевидна.

Результаты измерений Гроссмана, касающиеся интенсивности турбулентности и турбулентных напряжений сдвига, в достаточной мере согласуются с результатами, полученными другими авторами при помощи термоанемометра для воздушных потоков в трубах.

§ 2.10. Методы, основанные на визуализации течения

В этом параграфе мы дадим краткий обзор многочисленных методов, которые принадлежат к первой из групп, указанных во введении § 2.1, т. е. методов, основанных на визуализации картины течения или на восприятии этой картины чувствительным элементом, расположенным вне области течения.

*) Разновидность органического стекла. (Прим. перев.)

Если в движущуюся жидкость вводить очень мелкие частицы, которые нерастворимы в сплошной среде, то траектории этих частиц можно наблюдать при помощи киносъемки или фотографирования с кратковременной вспышкой. Если плотности этих частиц и частиц жидкости одинаковы, то эти траектории будут идентичны с траекториями движения жидких частиц. Производя фотографирование со вспышкой при известных экспозициях либо последовательно фотографируя поток через два или три известных интервала времени, можно вычислить смещение этих частиц по величине и направлению, а следовательно, и компоненты скорости потока, параллельные плоскости фотографирования. Чтобы получить полный вектор скорости, необходимо сделать две одновременные фотографии, соответствующие двум взаимно-перпендикулярным направлениям. Для того чтобы взвешенные частицы выглядели как яркие точки, можно воспользоваться специальной осветительной аппаратурой [55].

Для исследования турбулентного течения в прямой трубе по следам, оставляемым мелкими частицами, увлеченными жидкостью, Фейдж и Тауненд [61] воспользовались «ультрамикроскопом».

Частицы, которые применяются для этой цели, должны быть малы по сравнению с микромасштабом турбулентности; только при этом условии можно получить надежные результаты. Кроме того, аппаратура, с помощью которой осуществляется подача частиц в поток, тоже должна иметь очень малые размеры, чтобы возмущения течения, вызванные ею, оставались пренебрежимо малыми.

При измерениях в капельных жидкостях могут применяться различного рода эмульсии. Для измерений в воде [55–57] успешно использовались эмульсии, которые представляют собой смеси бензола с четыреххлористым углеродом и оливкового масла с двухбромистым этиленом. Эти смеси можно приготовить так, чтобы они имели ту же плотность, что и вода. Вполне очевидно, что качество фотографий будет лучше, если капли эмульсии одинаковы. Поэтому для проведения измерений в случае турбулентности, обладающей высокой интенсивностью, в поток должна вводиться достаточно тонкая эмульсия, с тем чтобы не происходило расщепления капель турбулентными напряжениями, ибо при этом обычно образуются вторичные капли переменного размера.

Для измерений в воздухе можно или применять мелкие мыльные пузыри [58], или с помощью электрической искры создавать локальные зоны высокой температуры, как это делал Тауненд [60]. При использовании метода мыльных пузырей в случае турбулентности с высокой интенсивностью возникают затруднения, аналогичные тем, которые упоминались в отношении эмульсии применительно к капельным жидкостям. В случае метода Тауненда существование нагретых микрозон ограничено довольно коротким периодом, что связано с влиянием тепловых потерь, деформации и диффузии, обусловлен-

ной микротурбулентностью. Весьма вероятно также и то, что, по крайней мере в начальный момент, разность плотностей, возникающая благодаря более холодной окружающей жидкости, может привести к ошибкам в количественном анализе картины течения.

С целью визуализации течения в аэродинамической трубе Буро [74] провел широкое исследование возможности применения мелких алюминиевых чешуек (размером в несколько микрон) в качестве трассирующих частиц.

Выше уже упоминалось, что эти частицы должны иметь такую же плотность, как и движущаяся жидкость; однако это не всегда возможно. Поэтому возникает вопрос, какова допустимая разность плотностей, если требуется обеспечить определенную степень точности измерений. Эта допустимая разность плотностей зависит от природы и интенсивности турбулентности потока, а также от размера взвешенных частиц.

Если разность плотностей велика, то возникающая благодаря этому ошибка может стать весьма ощутимой. Это можно проиллюстрировать на примере предельного случая. Предположим, что частицы песка подвергаются воздействию турбулентных движений воды и что движение этих частиц используется для изучения турбулентного движения воды. Какова будет при этом ошибка?

Допустим для простоты, что вода совершает чисто периодическое движение. В этом случае оказывается, что амплитуда отклонения песчинки диаметром 100 мк составит лишь половину амплитуды движения воды, если частота этого движения равна 100 сек⁻¹.

Мы не будем здесь углубляться в этот вопрос, так как аналогичная задача будет рассмотрена ниже применительно к диффузии дискретных частиц в турбулентном потоке. Однако читателю следует обратить на это внимание, поскольку при использовании метода взвешенных частиц совершенно необходимо прежде всего проанализировать влияние разности плотностей, с тем чтобы знать, каким образом интерпретировать результаты измерений. По этому вопросу читатель может почерпнуть полезную информацию из исследования Буро, на которое мы ссылались выше.

Вместо использования дискретных частиц можно также непрерывно подавать подходящее вещество, смешиваемое с движущейся жидкостью. Например, в случае газа могут применяться дым, полученный при сжигании древесины, гексит, пары аммиака, соляной кислоты, йода и т. п. либо даже относительно низкосортные материалы типа мелких опилок бальзового дерева [62]. В случае капельных жидкостей можно использовать красящие вещества, например чернила или, особенно, голубой лак (сульфоокислота фенилрозанилина), который является очень стойким и имеет различные оттенки. Благодаря их стойкости при исследовании, например, процессов смешения можно применять даже несколько красок.

Коллинз и Ньюбай [63] успешно применили инфракрасный газоанализатор для изучения процессов смешения в газах.

Вводя в поток либо дискретные частицы, либо дым, либо краски и т. п., можно измерять различные характеристики турбулентности.

Когда осредненное течение параллельно плоскости фотографирования, то осредненная скорость может быть определена по следам, оставляемым многочисленными частицами; точно так же могут быть найдены поперечная и осевая турбулентные пульсации скорости, хотя их точное определение является значительно более трудным. Само собой разумеется, что этот путь определения скоростей потока очень продолжителен и утомителен.

Рассмотрим однородную турбулентность, наложенную на постоянную скорость $\bar{U}$, направленную вдоль оси x_1 . Далее, введем в рассмотрение большое число пар точек, характеризуемых координатой ξ , удаленных друг от друга на расстояние x_2 и распределенных по всей области течения. Если в этих точках в поток одновременно ввести частицы, то по следам этих частиц на фотографическом изображении (предполагается, что частицы имеют одинаковую с жидкостью скорость) можно измерить поперечную компоненту турбулентной пульсации скорости $u_2(\xi)$ и $u_2(\xi + x_2)$ во всех парах точек. Отсюда можно вычислить произведение $u_2(\xi) u_2(\xi + x_2)$ для всех пар точек и взять среднюю величину по всем ξ , а именно $\overline{u_2(\xi) u_2(\xi + x_2)}$. Если турбулентность полагать квазистационарной, то можно также рассмотреть только одну пару точек, взять различные картины движения частиц, введенных последовательно через интервалы времени t , и определить среднюю по отношению ко всем t величину: $\overline{u_2(t) u_2(t + x_2)}$. Придавая величине x_2 различные значения, получаем продольную эйлерову корреляцию $f(x_2)$.

По пространственной дисперсии частиц в направлении оси x_2 вниз по потоку от точек ввода можно, пользуясь соотношениями (1.76) или (1.77), получить лагранжеву корреляцию $R_L(t)$ [см. (1.75)], а именно:

$$R_L(t) = \frac{1}{2v'^2} \frac{d^2}{dt^2} \overline{[y_2(t)]^2};$$

при этом можно воспользоваться соотношением $x_1 = \bar{U}t$.

Лагранжев масштаб времени $\mathcal{J}_L$ получается по формуле

$$\mathcal{J}_L = \int_0^\infty R_L(t) dt = \frac{1}{2v'^2} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} \overline{[y_2(t)]^2},$$

откуда пространственный масштаб $\Lambda_L = v' \mathcal{J}_L$ [см. (1.83)].

По диффузии тепла, дыма или краски вниз по потоку от источника можно определить интенсивность турбулентности и коэффициент вихревой диффузии ϵ_γ .

Если турбулентность однородна и изотропна, распределение субстанции $\bar{\Gamma}$ в плоскости, перпендикулярной к направлению скорости потока $\bar{U}$, на расстоянии x_1 от источника дается гауссовой кривой ошибок (см. § 5.5)

$$\bar{\Gamma} = \bar{\Gamma}_{\max} \exp \left(-\frac{\bar{U} x_2^2}{4 x_1 \epsilon_\gamma} \right), \quad (2.72)$$

где $\bar{\Gamma}_{\max}$ — максимальное значение $\bar{\Gamma}$ в этой плоскости на расстоянии x_1 от источника.

Обозначая через $(x_2)_{1/2}$ координату, при которой $\bar{\Gamma} = \frac{1}{2} \bar{\Gamma}_{\max}$, из уравнения (2.72) получаем

$$\epsilon_\gamma = \frac{\bar{U}}{4 x_1 \ln 2} (x_2)_{1/2}^2. \quad (2.73)$$

Интенсивность u' может быть найдена по измерениям на очень небольших расстояниях от источника; в этом случае между скоростями существует почти идеальная корреляция. Как будет показано ниже (глава 5), в некоторой плоскости на расстоянии x_1 от источника снова получается распределение $\bar{\Gamma}$ типа кривой Гаусса:

$$\bar{\Gamma} = \bar{\Gamma}_{\max} \exp \left(-\frac{x_2^2}{2 x_1} \frac{\bar{U}^2}{u'^2} \right),$$

откуда

$$\frac{u'}{\bar{U}} = \frac{(x_2)_{1/2}}{x_1 \sqrt{2 \ln 2}}.$$

Подобный метод описан Френкилем в работе [64]. В качестве трассирующего вещества он использовал аммиак в сочетании с азотно-кислой ртутью или дибромкрезолсульфоталеином, которыми была пропитана решетка, изготовленная из хлопковых волокон. По степени обесцвечивания волокон решетки трассирующим газом, выходящим из источника, расположенного вверх по потоку от решетки, Френкиль произвел оценку коэффициента вихревой диффузии в турбулентном потоке.

Хинце и Ван дер Хегге Цийнен [65] показали, что диффузионный метод может, кроме того, успешно применяться для определения интенсивности турбулентности и вихревого напряжения сдвига в потоке с поперечным градиентом скорости (см. § 5.6). В зависимости от степени анизотропности, т. е. от величины вихревого напряжения сдвига, распределение субстанции $\bar{\Gamma}$ в непосредственной близости вниз по потоку от источника является более или менее скошенным.

Применение диффузионных методов наталкивается иногда на существенные препятствия; это обусловлено тем, что некоторые факторы, присущие характеру турбулентного течения, при этом не принимаются

или --- из-за определенных трудностей — не могут быть приняты во внимание. Анализ этих факторов увел бы нас в сторону от рассматриваемых здесь вопросов; они будут рассмотрены в §§ 5.4, 5.5 и 5.7, к которым мы и отсылаем читателя.

Когда требуется найти распределение напряжений сдвига в потоке, то можно воспользоваться ориентацией частиц, взвешенных в капельной жидкости и визуализированных с помощью двойного лучепреломления поляризованного света [66—69]. Пригодными для этой цели веществами являются коллоидные глиноземные суспензии (магния, бентонита или гекторита), вирус табачной мозаики, мыльные растворы и прошедшие старение золи пятиокси ванадия. Степень ориентации зависит от величины поперечного градиента скорости и от отношения длины частицы к ее диаметру. При этом частицы не должны быть слишком мелкими; во всяком случае, они должны быть достаточно большими, чтобы на их перемещение не оказывало влияния броуновское движение.

Этот метод успешно применялся для измерений в двумерных ламинарных потоках, а также в довольно медленных двумерных турбулентных потоках с ярко выраженными зонами повышенных средних напряжений сдвига. Этот метод, по всей вероятности, будет непригоден для измерений в сильно турбулизированных потоках, особенно в трехмерных, из-за неясности влияния турбулентных пульсаций.

Визуальное наблюдение или кинематографическая съемка обычно дают более удовлетворительные результаты, чем фотографирование со вспышкой.

Преломление света под действием изменения плотности. Используя явление преломления света под воздействием изменения плотности, можно получить ценные сведения о пульсациях плотности, которые могут наблюдаться в турбулентном потоке. Эти изменения плотности могут быть обусловлены разностью температур, различием концентраций, когда при турбулентном движении перемешиваются два газа с существенно неодинаковыми плотностями, или разностью давлений; последний из этих факторов проявляется обычно лишь в таких потоках, в которых число Маха уже не является малой величиной.

Обычно используются следующие оптические методы: теневой метод, «шлирен»-метод Теплера и метод интерферометра Маха. Мы не будем рассматривать здесь эти методы и их достоинства, но заметим, что экспериментальные исследования, проведенные в последние годы, продемонстрировали растущее предпочтение методу интерферометра по сравнению со «шлирен»-методом благодаря относительной простоте соответствующего количественного анализа.

Изменение плотности является непосредственной мерой разницы температур или концентраций. Уравнение состояния газа дает прямую связь между температурой, давлением и плотностью.

Когда начинает влиять сжимаемость, то между скоростью и температурой или плотностью существует следующая связь:

$$U^2 = 2c_p (\Theta_{\text{торм}} - \Theta) = 2c_p \Theta_{\text{торм}} \left(1 - \frac{\rho_{\text{торм}}}{\rho}\right), \quad (2.74)$$

где U , Θ и ρ — соответственно местная скорость, температура и плотность, а $\Theta_{\text{торм}}$ и $\rho_{\text{торм}}$ — температура и плотность заторможенного потока.

Если применить соотношение (2.74) к турбулентному потоку, для которого мы можем записать

$$U = \bar{U} + u, \quad \rho = \bar{\rho} + \tilde{\rho},$$

то получим

$$\bar{U}^2 = 2c_p \Theta_{\text{торм}} \left(1 - \frac{\bar{\Theta}}{\Theta_{\text{торм}}}\right)$$

и

$$u = \frac{1}{\bar{U}} c_p \Theta_{\text{торм}} \left(\frac{\bar{\Theta}}{\Theta_{\text{торм}}}\right)^2 \frac{\tilde{\rho}}{\rho_{\text{торм}}}. \quad (2.75)$$

В свободных турбулентных потоках, например в свободных турбулентных струях и в следе за препятствием, температура и плотность торможения могут быть приняты равными соответствующим параметрам в окружающей жидкости.

Поскольку турбулентность представляет собой пространственное явление, картина распределения плотности также будет трехмерной. В таком случае возникает вопрос, как интерпретировать результирующее преломление светового луча, который проходит через турбулентную зону определенной глубины. Коважный [70] разработал метод получения данных о структуре турбулентности по изображению картины преломления. При этом он пользовался теневым методом. Коважный показал, что если турбулентность однородна во всей рассматриваемой турбулентной зоне и если, помимо этого, масштаб турбулентности очень мал по сравнению с размером поперечного сечения этой турбулентной зоны, то теневая картина должна быть идентична с картиной турбулентного течения в продольном сечении этой зоны. Кроме того, Коважный предложил метод определения (с помощью этих теневых изображений) корреляций скорости, а значит, и микро- и интегрального масштаба турбулентности. Это можно осуществить следующим образом. Изготавливаются два прозрачных изображения теневой картины. Если одно прозрачное изображение накладывается на другое так, что имеется полное совпадение этих изображений, то для параллельного светового пучка обеспечивается максимум прозрачности. Если теперь одно изображение немного сместить относительно другого, то произойдет уменьшение прозрачности. Но результирующая прозрачность двух изображений равна произведению

прозрачностей каждого изображения в отдельности. На этом факте основана возможность определения корреляции между плотностями в двух соседних точках поля течения. Поскольку, согласно соотношению (2.75), корреляция между изменениями плотности должна быть идентична с корреляцией между соответствующими турбулентными пульсациями скорости в двух точках, то этот метод дает также возможность измерения корреляций скорости.

Юберой и Коважный [71] применили этот метод для измерений в турбулентном следе за снарядом, летящим со сверхзвуковой скоростью, а также для измерения турбулентности в свободной струе нагретого воздуха. В последнем случае газ был несжимаемым и изменения плотности были обусловлены изменениями температуры; с целью сравнения производились также измерения с помощью термоанемометра. Результаты этих измерений показали, что теневой метод более надежен в области высоких волновых чисел, т. е. в диапазоне мелких вихрей. Следовательно, в этом случае микромасштаб определяется более точно, нежели интегральный масштаб. Сравнение величин, полученных при помощи двух указанных методов, дало вполне удовлетворительные результаты для микромасштаба и плохое соответствие для интегрального масштаба.

Хаббард с сотрудниками [72] использовали теневой метод для получения данных о структуре турбулентности в свободной струе углекислого газа. Они сняли спектр Дебая — Шеррера по теневым фотографиям со вспышкой. Этот метод обладает некоторым сходством с анализом Фурье; значит, при этом можно, по-видимому, получить некоторые сведения об энергетическом спектре турбулентного потока. По всей вероятности, для успешного применения этого метода необходимо, чтобы турбулентность была однородной. Однако, что касается турбулентности в свободной струе, это предположение является весьма сомнительным.

§ 2.11. Измерение осредненных величин статического давления и скорости

Точное измерение осредненного статического давления в турбулентном потоке является далеко не простой задачей. Если турбулентные пульсации скорости относительно малы по сравнению с осредненной скоростью в направлении потока, то обычно принято считать, что в плоскости, перпендикулярной к направлению осредненной скорости, осредненное статическое давление постоянно. В таком случае достаточно измерить осредненное статическое давление только в одной точке этой плоскости. Это статическое давление будет проще определить, когда в этой плоскости могут быть обнаружены зоны с низкой или вообще с нулевой турбулентностью. Например, в случае свободных струй, согласно высказанному выше

предположению, статическое давление в турбулентных областях равно давлению в окружающей неподвижной жидкости снаружи струи. В случае турбулентного течения в прямой трубе осредненное статическое давление принимается постоянным в любом поперечном сечении трубы и равным статическому давлению на ее стенке. В первом из этих случаев турбулентность в окружающей жидкости отсутствует и статическое давление может быть измерено с такой же точностью, которая обеспечивается вообще при измерениях давления. Поэтому любая возможная ошибка при определении статического давления внутри струи может быть обусловлена лишь несправедливостью высказанного выше предположения. Экспериментальные данные свидетельствуют о том, что использование этого предположения для определения характеристик свободных струй приводит к удовлетворительным результатам.

Измерение статического давления на стенке трубы осуществляется обычно с помощью нескольких дренажных отверстий в диаметральной плоскости трубы, равномерно расположенных по ее периферии. При этом статическое давление берется как среднее из показаний давления во всех дренажных отверстиях. Осредненное давление в дренажном отверстии зависит от турбулентных пульсаций скорости, направленных как перпендикулярно, так и параллельно стенке. Дать какое-либо общее правило для определения необходимых поправок к экспериментальным значениям давления не представляется возможным, поскольку отмеченное влияние пульсаций скорости зависит от того, каков закон стремления к нулю турбулентных пульсаций вблизи стенки, а также от размера дренажных отверстий и шероховатости стенки. Однако можно полагать, что ошибки, возникающие при измерении давления на стенке, весьма невелики, если только диаметр дренажного отверстия достаточно мал, а стенка является гладкой.

Для измерения осредненного статического давления в области турбулентного течения Глэзер [73] рекомендует использовать насадок Пито, который представляет собой длинный цилиндр, расположенный перпендикулярно к направлению осредненного течения. Он имеет два небольших, просверленных вдоль радиуса отверстия в своей диаметральной плоскости. Оси отверстий смещены одна относительно другой на угол 2φ и симметричны относительно направления осредненной скорости. Если взять среднее из показаний давления в обоих отверстиях, то его можно с удовлетворительной точностью рассматривать как статическое давление в турбулентном потоке. Если φ_0 — угловое положение той точки на цилиндре, давление в которой в точности равно статическому давлению, то правильное угловое смещение отверстий должно составлять $2\varphi = 2\varphi_0 + 180 \frac{d}{\pi D}$, где d и D — диаметры соответственно отверстия и цилиндра (см. рис. 2.6). Это объясняется тем, что давление в отверстии, просверленном

в цилиндре, равно давлению в некоторой точке на цилиндре, находящейся посередине радиуса отверстия в направлении к передней критической точке цилиндра. По тарировкам в стационарном потоке Глэзер нашел, что $\varphi_0 = 34,8^\circ$; однако другими экспериментаторами были получены иные значения, вплоть до $34,3^\circ$. Вообще говоря,

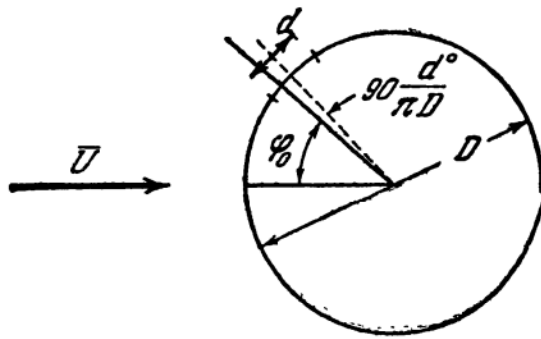


Рис. 2.6. Расположение отверстий статического давления на насадке Пито.

величина φ_0 является функцией числа Рейнольдса потока около цилиндра, но при больших значениях числа Рейнольдса она становится практически независимой от него. Чтобы избежать систематической ошибки, превышающей 1% от $\frac{1}{2}\rho\bar{U}^2$, необходимо определить величину 2φ с точностью до $0,4^\circ$. Этот метод нельзя применять в потоках с высокой относительной интенсивностью турбулентности, так как, помимо прочих факторов, переменное рас-

пределение статического давления на цилиндре уже больше не соответствует распределению, полученному по измерениям в статических условиях. Кроме того, диаметр цилиндра должен быть малым, по крайней мере не намного больше микромасштаба турбулентности в рассматриваемом потоке.

Часто делались попытки измерить статическое давление в турбулентном потоке при помощи трубки Пито с отверстиями статического давления. Однако этот метод является неверным, потому что в этом случае на давление в отверстиях очень сильное влияние оказывают турбулентные пульсации скорости. Измеренная величина статического давления будет при этом заниженной главным образом благодаря влиянию перпендикулярных к трубке турбулентных пульсаций скорости в поперечном направлении. Это станет очевидным, если представить себе, что поперечная скорость приведет к такому распределению давления по периферии цилиндрической трубки, которое соответствует поперечному обтеканию цилиндра, в результате чего возникнет отрицательное давление (соответствующее сопротивлению формы этого цилиндра).

К сожалению, до сих пор не проводилось систематического исследования влияния турбулентности на показания, получаемые с помощью трубок с отверстиями статического давления. Смысл этого влияния можно понять, если воспользоваться характеристикой чувствительности трубки Пито к отклонениям от направления течения. Эмпирическую зависимость для этой характеристики можно в первом приближении для не слишком больших значений φ представить формулой

$$(P_{\text{стат}})_{\text{изм}} - P_{\text{стат}} = A (\cos \varphi - 1) \frac{1}{2} \rho U^2. \quad (2.76)$$

По измерениям в статических условиях обнаружено, что $A \approx 1$, однако динамические измерения (проведенные, например, при вынужденных колебаниях самой трубки в поперечном направлении относительно потока) показывают, что величина A может, по-видимому, стать значительно больше единицы.

Рассмотрим теперь турбулентный поток с осредненной скоростью, параллельной трубке Пито, и с компонентами турбулентных пульсаций скорости u_1 , u_2 и u_3 ; тогда

$$U_{эфф} = \sqrt{(\bar{U} + u_1)^2 + u_2^2 + u_3^2}. \quad (2.77)$$

В уравнении (2.76) мы должны вместо U подставить величину $U_{эфф}$; для $\cos \varphi$ имеем (см. рис. 2.7):

$$\cos \varphi = \frac{\bar{U} + u_1}{U_{эфф}}. \quad (2.78)$$

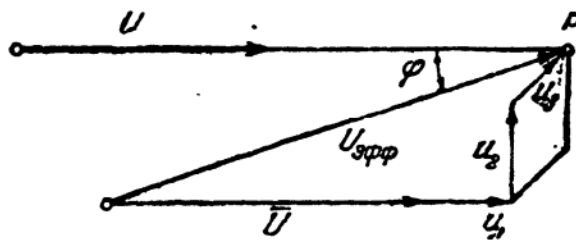


Рис. 2.7. Мгновенное направление $U_{эфф}$ относительно U .

Подстановка уравнений (2.77) и (2.78) в (2.76) приводит после некоторых преобразований, в которых применяется разложение в ряд по степеням $u_1/\bar{U}$, $u_2/\bar{U}$ и $u_3/\bar{U}$, к следующему соотношению:

$$(\bar{P}_{\text{стат}})_{\text{изм}} - P_{\text{стат}} = -A \frac{1}{2} \rho \bar{U}^2 \left(\frac{\overline{u_2^2} + \overline{u_3^2}}{2\bar{U}^2} + \frac{\overline{u_2^4} + \overline{u_3^4} + 2\overline{u_2^2 u_3^2}}{2\bar{U}^4} + \dots \right). \quad (2.79)$$

Отсюда видно, что измеренная величина статического давления действительно является заниженной. В случае почти изотропной турбулентности, когда можно принять, что $\overline{u_2^2} = \overline{u_3^2} = \overline{u'^2}$, ошибка в определении величины $[(\bar{P}_{\text{стат}})_{\text{изм}} - P_{\text{стат}}] / \frac{1}{2} \rho \bar{U}^2$, если пренебречь членами четвертого и более высоких порядков, будет равна $-A \overline{u'^2} / \bar{U}^2$.

Измерение осредненной скорости. При использовании методов визуализации течения, например, при помощи дискретных частиц, вводимых в движущуюся жидкость, можно получить величину осредненной скорости, исходя из среднего значения, соответствующего направлению и величине следа, оставленного частицей в течение периода освещения или экспозиции на регистрирующем элементе [74]. Диффузионные методы, в которых используются смешивающиеся с жидкостью трассирующие вещества, оказываются не столь пригодными, так как распространение трассирующего вещества вниз по потоку от источника зависит как от осредненной скорости, так и от турбулентной диффузии, в связи с чем при экспериментальном определении одного из этих факторов другой должен быть известен.

Обычно осредненная скорость определяется непосредственно при помощи чувствительного элемента, вводимого в поток. Возможность применения трубки Пито (или трубки полного напора) для измерения турбулентных пульсаций скорости исключается из-за ее инерционности. Но так как нас интересует здесь только осредненная скорость, то такой прибор, который, благодаря своей инерционности, дает некоторую среднюю величину, оказался бы очень полезным. Однако при этом мы сталкиваемся с той же проблемой, что и при измерении осредненного статического давления, а именно: как влияют на измерение полного напора турбулентные пульсации скорости?

В одном из теоретических исследований Гольдштейн [75] показал, что трубка полного напора фиксирует полный напор, соответствующий вектору полной скорости; это объясняется принятым Гольдштейном предположением о том, что фронтальную часть трубки можно считать «точкой» торможения. В этом случае получаем

$$\bar{P}_{\text{полн}} = \bar{P}_{\text{стат}} + \frac{1}{2} \rho [(\overline{U + u_1})^2 + \overline{u_2^2} + \overline{u_3^2}]. \quad (2.80)$$

Это предположение было бы справедливо, если бы трубка имела бесконечно малый диаметр, т. е. если бы фронтальную часть трубки можно было действительно считать точкой.

Однако, ввиду конечного диаметра отверстия трубки полного напора, могут наблюдаться отклонения от приведенного выше соотношения (2.80). Это обусловлено, прежде всего, тем, что в турбулентном потоке всегда имеется поперечный градиент скорости, который приводит к заметному изменению скорости на расстоянии, равном диаметру отверстия. В этом случае полное давление, измеряемое трубкой, не равно полному давлению, существующему в центре отверстия трубки [76]. Вторая причина возможных отклонений от соотношения (2.80) состоит в том, что поперечные пульсации скорости создают не такой скоростной напор, который соответствует (2.80), а значительно меньший; они могут привести даже к возникновению разрежения.

Весьма странно, что в данном случае, как и в отношении измерений статического давления с помощью отверстий в трубке Пито, тоже не проводилось систематического исследования влияния турбулентности на показания трубки полного напора, хотя трубка полного напора очень часто используется при изучении рассматриваемых вопросов.

Ввиду отсутствия надежных данных о поправках, учитывающих указанный эффект, Хинце и Ван дер Хегге Цийнен [77] пренебрегли влиянием турбулентных пульсаций скорости в поперечном направлении и рассмотрели в уравнении (2.80) только осевую компоненту турбулентных пульсаций скорости. В нескольких опытах Александра, Бэрона и Камингса [78] наблюдалось, что показание трубки полного напора, в противовес ожиданиям, заметно уменьшается

с увеличением относительной интенсивности турбулентности. Поэтому при использовании трубки полного напора эти авторы пренебрегли в дальнейшем влиянием турбулентности и приняли, что $\bar{P}_{\text{полн}} = P_{\text{стат}} + \frac{1}{2} \rho \bar{U}^2$. Ни один из этих двух методов не является полностью справедливым, однако, как уже отмечалось выше, в настоящее время нет возможности предложить лучший метод.

Для оценки влияния турбулентности на показания трубки полного напора можно воспользоваться чувствительностью ее к направлению. Вместо (2.80) примем следующее соотношение:

$$(P_{\text{полн}})_{\text{изм}} = P_{\text{стат}} + \frac{1}{2} \rho U_{\text{эфф}}^2 + B (\cos \varphi - 1) \frac{1}{2} \rho U_{\text{эфф}}^2,$$

где $\cos \varphi = (\bar{U} + u_1)/U_{\text{эфф}}$.

Третий член в этом выражении представляет аппроксимацию эмпирической характеристики чувствительности к направлению для не слишком больших величин φ .

По измерениям в статических условиях значение постоянной B составляет приблизительно 3. Однако при динамических измерениях, когда трубка сама приводилась в колебательное движение в поперечном направлении относительно стационарного потока, величина B была, по-видимому, значительно больше 3.

Следуя методу, уже описанному для случая измерений осредненного статического давления, после некоторых преобразований получаем

$$(\bar{P}_{\text{полн}})_{\text{изм}} = P_{\text{стат}} + \frac{1}{2} \rho \bar{U}^2 \left[1 + \frac{\bar{u}_1^2 + \bar{u}_2^2 + \bar{u}_3^2}{\bar{U}^2} - B \left(\frac{\bar{u}_2^2 + \bar{u}_3^2}{2\bar{U}^2} + \frac{\bar{u}_2^4 + \bar{u}_3^4 + 2\bar{u}_2^2 \bar{u}_3^2}{8\bar{U}^4} + \dots \right) \right]. \quad (2.81)$$

В зависимости от величины B измеренный полный напор может быть значительно выше или ниже действительного значения. Для изотропной турбулентности, снова пренебрегая членами четвертого порядка и выше, получим

$$(\bar{P}_{\text{полн}})_{\text{изм}} = P_{\text{стат}} + \frac{1}{2} \rho \bar{U}^2 \left[1 + \frac{u'^2}{\bar{U}^2} (3 - B) \right].$$

Отсюда при $B = 3$ получается результат, оправдывающий предположение Александера и др.

Объединяя выражения (2.79) и (2.81), приходим к следующей формуле для случая трубки Пито:

$$(\bar{P}_{\text{полн}})_{\text{изм}} - (\bar{P}_{\text{стат}})_{\text{изм}} = \frac{1}{2} \rho \bar{U}^2 \left[1 + \frac{\bar{u}_1^2 + \bar{u}_2^2 + \bar{u}_3^2}{\bar{U}^2} - (B - A) \left(\frac{\bar{u}_2^2 + \bar{u}_3^2}{2\bar{U}^2} + \dots \right) \right]. \quad (2.82)$$

При изотропной турбулентности эта формула приводит к соотношению

$$(\bar{P}_{\text{полн}})_{\text{изм}} - (\bar{P}_{\text{стат}})_{\text{изм}} = \frac{1}{2} \rho \bar{U}^2 \left[1 + \frac{u'^2}{\bar{U}^2} (3 - B + A) \right].$$

Последние два выражения справедливы только в том случае, когда скорости в отверстиях для измерения полного напора и статического давления не связаны между собой (некоррелированы). Это, в свою очередь, требует, чтобы расстояние между двумя этими точками было намного больше, чем расстояние корреляции или интегральный масштаб турбулентности.

При использовании термоанемометра для измерения осредненной скорости потока для внесения поправки на влияние турбулентных пульсаций скорости, когда они становятся большими, можно обратиться к выведенному в § 2.3 выражению (2.40).

Чтобы внести поправку, учитывающую влияние больших турбулентных пульсаций скорости, аналогично можно поступить и в случае анемометра с электрическим разрядом, пользуясь его характеристикой чувствительности к направлению [см. уравнение (2.68)].

Поскольку напряжение в случае метода электромагнитной индукции является линейной функцией скорости и зависит лишь от компоненты скорости, перпендикулярной к линии, соединяющей электроды, и к направлению электромагнитного поля, то никакой поправки в измеренное значение осредненной скорости вносить не требуется, даже если турбулентные пульсации скорости станут большими.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ К ГЛАВЕ 2

- A — коэффициент характеристики термоанемометра; A_g — при температуре газа; A_f — при пленочной температуре.
- B — коэффициент характеристики термоанемометра.
- C_w — тепловая емкость нити термоанемометра.
- c_w — удельная теплоемкость материала нити термоанемометра.
- c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении.
- c — скорость света.
- d — диаметр нити термоанемометра.
- E — разность потенциалов между электродами.
- E — спектральная функция кинетической энергии турбулентности.
- e — падение напряжения на нити термоанемометра; $\bar{e}^2$ — средне-квадратичная величина.
- f — коэффициент пространственной продольной корреляции скорости.
- Gr — число Грасгофа.
- g — коэффициент пространственной поперечной корреляции скорости.

- g — ускорение силы тяжести.
 $g_{кр}$ — крутизна характеристики.
 H — напряженность электромагнитного поля.
 h — коэффициент пространственной тройной корреляции скорости.
 I — сила электрического тока, нагревающего нить термоанометра; $\bar{I}$ — осредненная по времени величина; i — турбулентная пульсация тока.
 k — коэффициент пространственной тройной корреляции скорости.
 l — длина нити термоанометра, l_c — «холодная» длина.
 $l_{раз}$ — разрешающая длина нити термоанометра.
 M — постоянная времени нити термоанометра.
 Ma — число Маха.
 Nu — число Нуссельта.
 $P_{ст}$ — статическое давление; $\bar{P}_{ст}$ — осредненная по времени величина.
 $P_{полн}$ — полное давление; $\bar{P}_{полн}$ — осредненная по времени величина.
 Pr — число Прандтля.
 q — коэффициент пространственной тройной корреляции скорости.
 Re — число Рейнольдса.
 R_w — электрическое сопротивление нити термоанометра; $\bar{R}_w$ — осредненная по времени величина; R_0 — при характерной температуре; R_g — при температуре газа; r_w — турбулентная пульсация.
 R_E — коэффициент эйлеровой временной корреляции.
 R_L — коэффициент лагранжевой временной корреляции.
 $S_{ik,j}$ — корреляционный тензор третьего ранга.
 s — чувствительность нити термоанометра; расстояние между электродами.
 t — время.
 U — эйлерова скорость; $\bar{U}$ — осредненная по времени величина;
 u — компонента турбулентной пульсации; $u' = \sqrt{\bar{u}^2}$ — среднеквадратичная величина.
 V — напряженность индуцированного электрического поля.
 x_i — эйлеровы координаты в декартовой системе.
 y_i — лагранжевы координаты в декартовой системе.
 α — коэффициент теплоотдачи.
 β — коэффициент объемного расширения газа; β_f — при пленочной температуре.
 b, b_1 — температурные коэффициенты электрического сопротивления.
 C — поправочный коэффициент.
 Δ — разность.
 ϵ — коэффициент преобразования.
 ϵ — коэффициент вихревой диффузии; ϵ_γ — для скалярной субстанции.

- Γ — скалярная субстанция; $\bar{\Gamma}$ — осредненная по времени величина;
 γ — турбулентная пульсация.
 $\mathcal{J}_E$ — эйлеров интегральный масштаб времени.
 $\mathcal{J}_L$ — лагранжев интегральный масштаб времени.
 i — $\sqrt{-1}$.
 K — коэффициент теплопроводности; K_g — для газа; K_f — то же при пленочной температуре.
 Λ_g — пространственный поперечный интегральный масштаб.
 λ_g — пространственный поперечный микромасштаб.
 μ_g — динамический коэффициент вязкости; μ_f — при пленочной температуре.
 μ — относительная магнитная проницаемость.
 π — 3, 14159 ...
 $\mathcal{R}_w$ — электрическое сопротивление нити термоанемометра на единицу длины; $\mathcal{R}_0$ — при характерной температуре; $\mathcal{R}_g$ — при температуре газа; r_w — турбулентная пульсация.
 ρ — плотность; $\bar{\rho}$ — осредненная по времени величина; $\tilde{\rho}$ — турбулентная пульсация; ρ_g — плотность газа; ρ_f — то же при пленочной температуре; $\rho_{\text{торм}}$ — то же в критической точке; ρ_w — плотность материала нити.
 τ — время.
 Θ — температура; $\bar{\Theta}$ — осредненная по времени величина; θ — турбулентная пульсация; Θ_w — температура нити; Θ_g — температура газа; $\Theta_f = \frac{1}{2}(\Theta_g + \Theta_w)$ — пленочная температура; Θ_e — равновесная температура нити термоанемометра; $\Theta_{\text{торм}}$ — температура торможения.
 ξ_i — эйлеровы координаты в декартовой системе.
-

ГЛАВА 3

ИЗОТРОПНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

§ 3.1. Введение

Изотропная турбулентность представляет собой простейший тип турбулентности, так как при этом не отдается предпочтение какому-либо особому направлению, а для описания структуры и динамики турбулентности требуется минимальное число величин и соотношений. Однако изотропная турбулентность является также и гипотетическим типом турбулентности, поскольку любое реальное турбулентное течение не обладает действительной изотропностью, хотя можно создать такие условия, при которых изотропность будет в большей или меньшей степени приближения обеспечена.

В этой главе мы рассмотрим изотропную турбулентность в значительно более широкой постановке, нежели в главе 1.

Читатель, который знаком главным образом с практическими и прикладными аспектами гидродинамики, возможно, склонен спросить, почему этот гипотетический тип турбулентности рассматривается столь широко. Ответ состоит в том, что, несмотря на гипотетический характер изотропной турбулентности, знание ее характеристик может послужить основой для изучения реальных, неизотропных турбулентных потоков. Благодаря своей относительной простоте, изотропная турбулентность более, чем какой-либо иной тип турбулентности, поддается общему теоретическому анализу. Полученные при этом теоретические соотношения довольно легко можно проверить с помощью соответствующих опытов по исследованию турбулентности, которая с достаточной степенью приближения является изотропной.

Более того, теоретические и экспериментальные результаты подобных исследований имеют больше практического значения, чем можно себе представить. Из теоретического анализа и экспериментальных наблюдений известно, что микроструктура подавляющего большинства реальных, неизотропных турбулентных потоков является приблизительно изотропной (локальная изотропность). Отсюда следует, что многие свойства изотропной турбулентности приложимы и к явлениям

реальной турбулентности, определяемым главным образом микро-структурой, в которой преобладает локальная изотропность.

Но даже если мы имеем дело с неизотропной макроструктурой реальной турбулентности или если эта турбулентность неизотропна в большей части своего спектра, то для отыскания первого приближения зачастую оказывается возможным рассматривать подобную турбулентность так, как если бы она являлась изотропной. Расхождение между результатами, полученными в предположении об изотропности, и результатами измерений зачастую настолько мало, что им в первом приближении вполне можно пренебречь, причем оно иногда оказывается даже меньше разброса экспериментальных точек.

Благодаря своей относительной простоте изотропная турбулентность изучена наиболее полно как теоретически, так и экспериментально. Геометрические и кинематические соотношения, присущие турбулентности, исследовались с помощью корреляционных и спектральных функций, а также путем анализа динамики корреляций и спектральных функций (вырождение турбулентности).

К настоящему времени удовлетворительную и довольно полную картину формальных геометрических соотношений удалось получить лишь в случае выполнения условия изотропности, т. е. при инвариантности относительно поворота системы координат и отражения от координатных плоскостей, и условия несжимаемости, т. е. для несжимаемой жидкости. Однако получить общее и полное решение соответствующих дифференциальных уравнений до сих пор не представилось возможным. За исключением единственного предельного случая, остаются неизвестными полные решения для различных корреляционных и спектральных функций, а также для их изменения во времени. Между тем введение некоторых дополнительных предположений или постулатов, выполняющихся с той или иной степенью приближения, позволило получить решения, справедливость которых, правда, ограничена.

Одно из распространенных предположений состоит в том, что структура турбулентности и кинематические соотношения остаются в течение периода вырождения подобными или, лучше сказать, автомодельными. Подобие и автомодельность — не идентичные понятия. Чтобы избежать каких-либо недоразумений, мы будем различать эти понятия между собой, следуя при этом Стюарту и Таунсенду [17].

Термин «подобие» используется в том случае, когда для определения структуры произвольного поля турбулентности считается достаточным задание только масштаба длины и масштаба скорости.

Термин «автомодельность» используется в том случае, когда предполагается, что структура турбулентности сохраняет свое подобие на протяжении всего периода вырождения; но, будучи выраженной через специальные масштабы длины и скорости, эта структура для других вырождающихся турбулентных течений не обязательно одинакова,

В последующем изложении мы, как и большинство исследователей, будем полагать жидкость несжимаемой. Само собой разумеется, что это предположение приводит к существенному упрощению задачи. Однако в конце этой главы будет сделано несколько замечаний о влиянии сжимаемости.

§ 3. 2. Корреляционные тензоры

В главе 1 было показано, что в современных теориях статистическое поведение турбулентности удобно описывается с помощью корреляций между пульсациями давления и пульсациями скорости в двух точках потока. Там же были введены корреляционные тензоры первого, второго и третьего рангов, а именно:

$$\begin{aligned}(K_{i,p})_{A,B} &= \overline{(u_i)_A p_B}, \\ (Q_{i,j})_{A,B} &= \overline{(u_i)_A (u_j)_B}, \\ (S_{ij,k})_{A,B} &= \overline{(u_i)_A (u_j)_A (u_k)_B}.\end{aligned}$$

В отличие от индексов i, j, k и т. д. индекс p является фиксированным и указывает просто на принадлежность к скалярной величине p .

Рассмотрим теперь эти корреляционные тензоры более подробно, особенно в отношении тех свойств, которые вытекают из условия изотропности, и выведем общие выражения для изотропных тензоров. При этом мы воспользуемся теорией инвариантов в том виде, как она изложена Робертсоном [1]. Эта теория является полностью формальной и не обеспечивает возможности наглядно интерпретировать смысл полученных геометрических соотношений между различного рода корреляциями, расстоянием между двумя точками A и B , а также их положением.

Карман и Хауэрт [5] получили подобные соотношения, применив геометрический подход, физический смысл которого более прозрачен. С целью иллюстрации приведем один пример, в котором используется метод этих авторов, а именно вывод тензора двойных корреляций $(Q_{i,j})_{A,B}$.

В общем случае корреляционные тензоры представляют собой функции от пространственных координат, от расстояния между точками A и B и времени. Ввиду того, что нас интересуют лишь геометрические соотношения, то для простоты мы не будем отыскивать в явном виде зависимость выражений для этих тензоров от времени.

Корреляционный тензор первого ранга $(K_{p,i})_{A,B}$. Этот тензор имеет три компоненты, соответствующие тем трем компонентам, на которые может быть разложена скорость в точке B . Не

ограничивая общности, можно выбрать систему координат таким образом, чтобы ось x_1 совпадала с линией AB .

В этой системе координат три указанные компоненты тензора записываются в следующем виде (см. рис. 3.1):

$$\overline{p_A(u_1)_B}, \quad \overline{p_A(u_2)_B}, \quad \overline{p_A(u_3)_B}.$$

Условие изотропности требует, чтобы эти выражения были инвариантны относительно отражения от координатных плоскостей.

Из трех компонент тензора два последних могут быть инвариантны только в том случае, если они равны нулю:

$$\overline{p_A(u_2)_B} = 0, \quad \overline{p_A(u_3)_B} = 0.$$

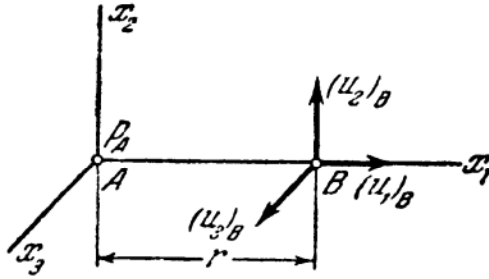


Рис. 3.1. Корреляция между давлением в точке A и компонентами скорости в точке B .

Остающуюся компоненту $\overline{p_A(u_1)_B}$ или $\overline{p_A(u_r)_B}$ обозначим через $K_1(r)$ и покажем, что эта корреляция, для того чтобы быть инвариантной, должна быть нечетной функцией от r .

С этой целью разложим $K_1(r)$ в ряд по степеням r :

$$K_1(r) = [K_1]_{r=0} + \frac{r}{1!} \left[\frac{\partial K_1}{\partial r} \right]_{r=0} + \frac{r^2}{2!} \left[\frac{\partial^2 K_1}{\partial r^2} \right]_{r=0} + \dots,$$

где

$$\begin{aligned} [K_1]_{r=0} &= \overline{p_A(u_r)_B}_{r=0}, \\ \left[\frac{\partial K_1}{\partial r} \right]_{r=0} &= \left[p_A \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)_B \right]_{r=0}, \\ \left[\frac{\partial^2 K_1}{\partial r^2} \right]_{r=0} &= \left[p_A \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} \right)_B \right]_{r=0}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Коэффициенты этого разложения $[K_1]_{r=0}$, $\left[\frac{\partial K_1}{\partial r} \right]_{r=0}$ и т. д. являются скалярными величинами и поэтому должны быть инвариантными.

Далее, величины u_r , $\partial^2 u_r / \partial r^2$, $\partial^4 u_r / \partial r^4$ и т. д. при отражении изменяют свой знак и поэтому, чтобы быть инвариантными, должны равняться нулю; величины $\partial u_r / \partial r$, $\partial^3 u_r / \partial r^3$ и т. д. при отражении своего знака не изменяют.

Стало быть, разложение $K_1(r)$ в степенной ряд должно иметь следующий вид:

$$K_1(r) = r \left[\frac{\partial K_1}{\partial r} \right]_{r=0} + \frac{r^3}{3!} \left[\frac{\partial^3 K_1}{\partial r^3} \right]_{r=0} + \dots \quad (3.1)$$

Каким должно быть выражение для тензора $(K_{p,i})_{A,B}$, записанное через корреляцию $K_1(r)$ и координаты ξ_j точки B относительно

точки A , когда точки A и B расположены по отношению к системе координат произвольно?

Рассмотрим скалярную корреляцию $K_{A,B}$ между давлением в точке A и компонентой скорости в точке B , соответствующей заданному направлению b :

$$K_{A,B} = (K_{p,i})_{A,B} e_{bi}, \quad (3.2)$$

где e_{bi} — направляющий косинус направления b относительно направления оси x_i (см. § 1.4). Как видим, $K_{A,B}$ представляет собой однородную линейную функцию от e_{bi} , а $(K_{p,i})_{A,B}$ есть функция ξ_j . Поскольку $K_{A,B}$ — скаляр, то величина $(K_{p,i})_{A,B}$ должна быть такой функцией от ξ_j , чтобы те члены в выражении для $K_{A,B}$, которые содержат ξ_j и e_{bi} , были скалярами.

Единственной системой скалярных комбинаций, которые могут быть образованы из величин ξ_j и e_{bi} , является следующая:

$$\xi_i \xi_i, \quad e_{bi} e_{bi} \quad \text{и} \quad \xi_i e_{bi}.$$

Но так как $e_{bi} e_{bi} = 1$, то из этих комбинаций существенными являются только первая и третья. Следовательно, величина $K_{A,B}$ должна быть функцией от $\xi_i \xi_i = r^2$ и $\xi_i e_{bi}$. Тогда единственная комбинация, являющаяся линейной и однородной относительно e_{bi} , запишется так:

$$K_{A,B} = K_1^*(r^2) \xi_i e_{bi}. \quad (3.3)$$

Из соотношений (3.2) и (3.3) следует, что

$$(K_{p,i})_{A,B} = K_1^*(r^2) \xi_i. \quad (3.4)$$

Это — общее выражение для изотропного тензора первого ранга.

Если в качестве начала координат выбрать точку A , а ось x_1 провести через точки A и B , то, так как $\xi_1 = r$, из уравнения (3.4) вытекает, что

$$K_1(r) = K_1^*(r^2) r.$$

Следовательно,

$$(K_{p,i})_{A,B} = \frac{K_1(r)}{r} \xi_i. \quad (3.5)$$

Предыдущее выражение тоже показывает, что величина $K_1(r)$ должна быть нечетной функцией от r .

Посмотрим теперь, что получается, когда жидкость является несжимаемой. Имеем

$$\left(\frac{\partial K_{p,i}}{\partial x_i} \right)_B = p_A \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)}_B = 0,$$

так что дивергенция от $(K_{p,i})_{A,B}$ стремится к нулю. Поскольку

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_B = \frac{\partial}{\partial \xi_i},$$

то из соотношения (3.5) получаем

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\frac{K_1(r)}{r} \xi_i \right) = 3 \frac{K_1}{r} - \frac{K_1}{r^2} \frac{\xi_i \xi_i}{r} + \frac{\xi_i \xi_i}{r^2} \frac{\partial K_1}{\partial r} = \frac{2K_1}{r} + \frac{\partial K_1}{\partial r} = 0,$$

откуда $K_1(r) = c/r^2$. Ввиду того, что $K_1(r)$ при $r=0$ не может обращаться в бесконечность, постоянная должна равняться нулю; следовательно, $K_1(r) = 0$. Отсюда следует, что при изотропной турбулентности в несжимаемой жидкости

$$(K_{p,i})_{A,B} = \overline{p_A(u_i)_B} = 0. \quad (3.6)$$

Заметим, что из одного лишь условия изотропности вытекает $\overline{p_A(u_n)_B} = 0$ (условие инвариантности относительно отражения), $[\overline{p_A(u_r)_B}]_{r=0} = 0$ (условие инвариантности относительно отражения), но

$$\overline{p_A(u_r)_B} \neq 0 \quad \text{при} \quad r \neq 0,$$

а условие несжимаемости требует, чтобы последняя корреляция и, стало быть, тензор $(K_{p,i})_{A,B}$ были равны нулю.

Корреляционный тензор второго ранга $(Q_{i,j})_{A,B}$. В главе 1 мы рассмотрели корреляции $(Q_{i,j})_{A,B}$ и некоторые особенности двух конкретных корреляций, а именно продольной корреляции $u'^2 f(r)$ и поперечной корреляции $u'^2 g(r)$. Мы также показали, что корреляции типа $(Q_{i,j})_{A,B}$ могут быть выражены через продольную и поперечную корреляции лишь для случая особого расположения точек A и B относительно рассматриваемой системы координат.

Выведем теперь общее выражение для изотропного тензора второго ранга и, основываясь на нем, выразим $(Q_{i,j})_{A,B}$ через $f(r)$ и $g(r)$.

Рассмотрим скалярную корреляцию $Q_{A,B}$ между компонентой скорости в точке A в направлении a и компонентой скорости в точке B в направлении b :

$$Q_{A,B} = (Q_{i,j})_{A,B} e_{ai} e_{bj}.$$

Корреляция $Q_{A,B}$ зависит от величин ξ_k , e_{ai} и e_{bj} , причем составляющие этой функции являются скалярными комбинациями из ξ_k , e_{ai} и e_{bj} ; более того, эта функция должна быть однородной и билинейной по e_{ai} и e_{bj} .

Скалярные комбинации из величин ξ_k , e_{ai} и e_{bj} вплоть до членов, билинейных по e_{ai} и e_{bj} , выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \xi_k \xi_k &= r^2, \quad e_{ai} e_{ai} = 1, \quad e_{bj} e_{bj} = 1, \\ \xi_i e_{ai}, \quad \xi_j e_{bj}, \quad \delta_{ij} e_{ai} e_{bj}, \quad \varepsilon_{ijk} \xi_k e_{ai} e_{bj}. \end{aligned}$$

Однородная билинейная функция от e_{ai} и e_{bj} записывается так:

$$Q_{A,B} = Q_1 \xi_i \xi_j e_{ai} e_{bj} + Q_2 \delta_{ij} e_{ai} e_{bj} + Q_3 \varepsilon_{ijk} \xi_k e_{ai} e_{bj}.$$

откуда

$$(Q_{i,j})_{A,B} = Q_1 \xi_i \xi_j + Q_2 \delta_{ij} + Q_3 \varepsilon_{ijk} \xi_k,$$

где Q_1 , Q_2 и Q_3 — функции от $\xi_i \xi_i = r^2$.

Вследствие изотропности должна иметь место инвариантность относительно отражения от произвольной точки; следовательно,

$$(Q_{i,j})_{A,B} = (Q_{j,i})_{A,B}.$$

Но поскольку $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$, то $Q_3 = 0$; стало быть,

$$(Q_{i,j})_{A,B} = Q_1(r^2) \xi_i \xi_j + Q_2(r^2) \delta_{ij}. \quad (3.7)$$

Это уравнение и является общим выражением для изотропного тензора второго ранга.

Каков смысл величин $Q_1(r^2)$ и $Q_2(r^2)$? Рассмотрим особый случай, когда точки A и B лежат на оси x_1 , причем начало координат совпадает с точкой A . Тогда $\xi_1 = r$, $\xi_2 = \xi_3 = 0$, $Q_{1,1} = u'^2 f(r)$ и $Q_{2,2} = u'^2 g(r)$; следовательно, из формулы (3.7) получаем

$$Q_{1,1} = u'^2 f(r) = Q_1(r^2) r^2 + Q_2(r^2)$$

и

$$Q_{2,2} = u'^2 g(r) = Q_2(r^2).$$

Отсюда

$$Q_1(r^2) = u'^2 \frac{f(r) - g(r)}{r^2}, \quad Q_2(r^2) = u'^2 g(r).$$

Тогда уравнение (3.7) принимает вид

$$(Q_{i,j})_{A,B} = u'^2 \left[\frac{f(r) - g(r)}{r^2} \xi_i \xi_j + g(r) \delta_{ij} \right]. \quad (3.8)$$

Геометрический вывод уравнения (3.8). Рассмотрим каждый член $(u_i)_A (u_j)_B$ в отдельности. Это достаточно сделать только в отношении корреляций двух типов, а именно при $i = j$ и $i \neq j$.

Пусть начало координат находится в точке A , а r — расстояние AB — имеет компоненты ξ_i . Рассмотрим $(u_1)_A (u_1)_B$. Через отрезок AB и ось x_1 проведем плоскость, как показано на рис. 3.2. В этой плоскости скорость в точках A и B может быть разложена соответственно на компоненты $(u_1^*)_A$ и $(u_1^*)_B$, направленные вдоль AB , и компоненты $(u_2^*)_A$ и $(u_2^*)_B$, перпендикулярные к AB ; третьи компоненты, $(u_3^*)_A$ и $(u_3^*)_B$ перпендикулярны к проведенной плоскости. Последние компоненты не дают какого-либо добавка соответственно к $(u_1)_A$ и $(u_1)_B$. Из рис. 3.2 следует, что

$$(u_1)_A = (u_1^*)_A \cos \varphi_1 - (u_2^*)_A \sin \varphi_1 = (u_1^*)_A \frac{\xi_1}{r} - (u_2^*)_A \sqrt{1 - \frac{\xi_1^2}{r^2}},$$

$$(u_1)_B = (u_1^*)_B \frac{\xi_1}{r} - (u_2^*)_B \sqrt{1 - \frac{\xi_1^2}{r^2}}.$$

Если $(u_1)_A$ умножить на $(u_1)_B$, то получатся следующие произведения:

$$\overline{(u_1^*)_A (u_1^*)_B} = u'^2 f(r), \quad \overline{(u_2^*)_A (u_2^*)_B} = u'^2 g(r)$$

и, вследствие условий инвариантности,

$$\overline{(u_1^*)_A (u_2^*)_B} = \overline{(u_2^*)_A (u_1^*)_B} = 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} Q_{1,1} &= \overline{(u_1)_A (u_1)_B} = u'^2 f(r) \frac{\xi_1^2}{r} + u'^2 g(r) \left(1 - \frac{\xi_1^2}{r^2}\right) = \\ &= u'^2 \left[\frac{f(r) - g(r)}{r^2} \xi_1 \xi_1 + g(r) \right]. \end{aligned}$$

Аналогичным путем получим

$$Q_{2,2} = u'^2 \left[\frac{f(r) - g(r)}{r^2} \xi_2 \xi_2 + g(r) \right]$$

или, в более общей форме,

$$Q_{i,j} = u'^2 \left[\frac{f(r) - g(r)}{r^2} \xi_i \xi_j + g(r) \right] \quad \text{при } i = j. \quad (a)$$

Рассмотрим теперь $\overline{(u_1)_A (u_2)_B}$. Снова проведем плоскость через AB и

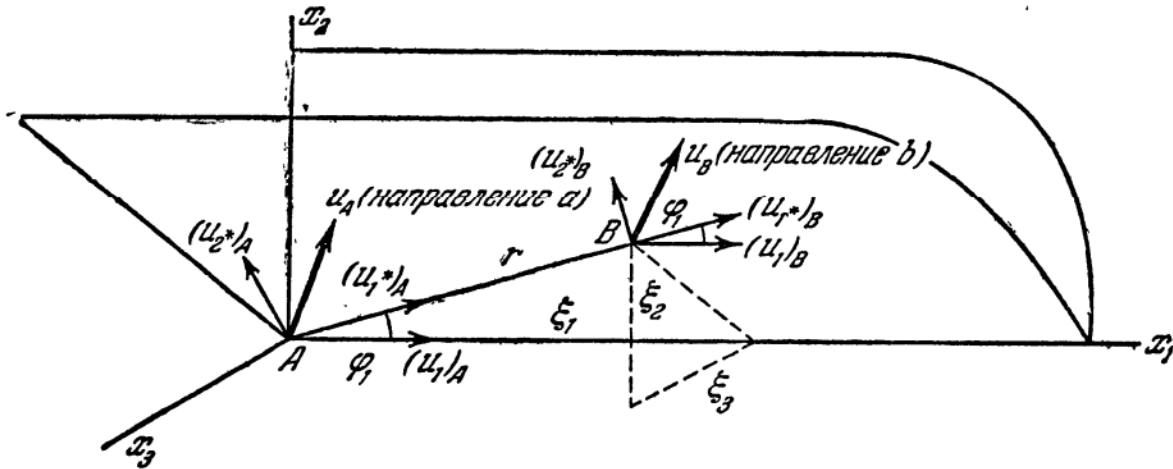


Рис. 3.2. Связь между $\overline{(u_1)_A (u_1)_B}$ и $f(r)$ и $g(r)$.

сью x_1 (см. рис. 3.3). Как и в предыдущем случае, из рассмотрения этого рисунка следует, что

$$(u_1)_A = (u_1^*)_A \frac{\xi_1}{r} - (u_2^*)_A \sqrt{1 - \frac{\xi_1^2}{r^2}},$$

$$\begin{aligned} (u_2)_B &= (u_1^*)_B \cos \varphi_2 + (u_2^*)_B \frac{\cos \varphi_2}{\sin \varphi_1} + \text{компонента } (u_3^*)_B = \\ &= (u_1^*)_B \frac{\xi_2}{r} + (u_2^*)_B \frac{\xi_1 \xi_2}{r^2 \sqrt{1 - \xi_1^2/r^2}} + \text{компонента } (u_3^*)_B. \end{aligned}$$

На основании условия изотропности

$$\overline{(u_1^*)_A (u_2^*)_B} = 0, \quad \overline{(u_1^*)_A (u_3^*)_B} = 0, \quad \overline{(u_2^*)_A (u_1^*)_B} = 0, \quad \overline{(u_2^*)_A (u_3^*)_B} = 0,$$

так что

$$\overline{(u_1)_A (u_2)_B} = \overline{(u_1^*)_A (u_1^*)_B} \frac{\xi_1 \xi_2}{r^2} - \overline{(u_2^*)_A (u_2^*)_B} \frac{\xi_1 \xi_2}{r^2},$$

или

$$Q_{1,2} = u'^2 \frac{f(r) - g(r)}{r^2} \xi_1 \xi_2.$$

И наконец, в общей форме

$$Q_{i,j} = u'^2 \frac{f(r) - g(r)}{r^2} \xi_i \xi_j, \quad i \neq j. \quad (6)$$

Следовательно, соотношения (а) и (б) можно объединить следующим образом:

$$Q_{i,j} = u'^2 \left[\frac{f(r) - g(r)}{r^2} \xi_i \xi_j + g(r) \delta_{ij} \right].$$

Теперь для вывода соотношения между Q_1 и Q_2 или между f и g воспользуемся условием несжимаемости жидкости.

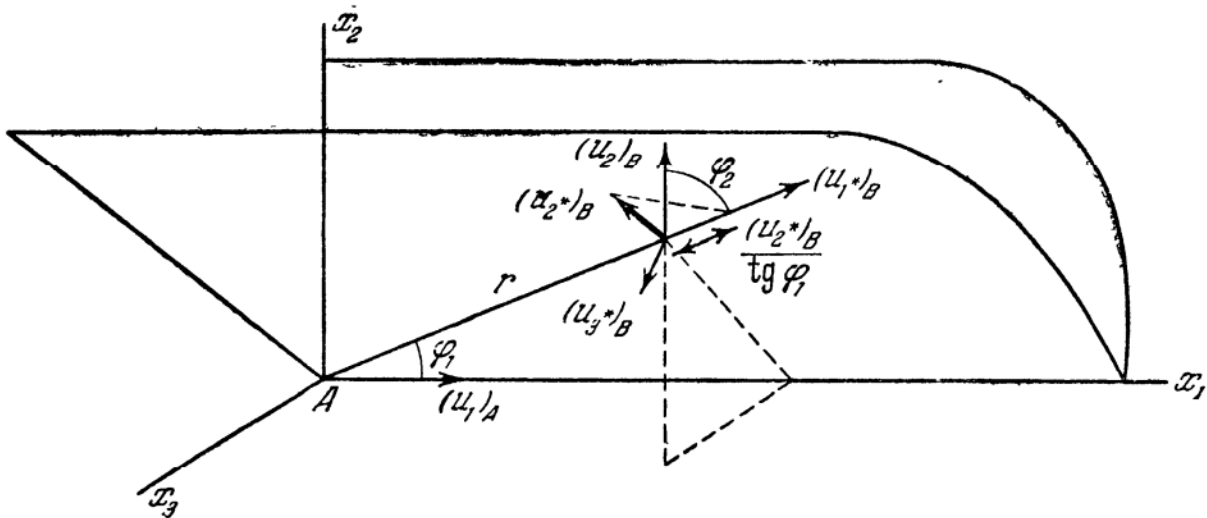


Рис. 3.3. Связь между $\overline{(u_1)_A (u_2)_B}$ и $f(r)$ и $g(r)$.

Для несжимаемой жидкости получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_B (Q_{i,j})_{A,B} = \overline{(u_i)_A \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right)_B} = 0.$$

Если $(x_j)_B - (x_j)_A = \xi_j$, то

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} (Q_{i,j})_{A,B} = 0.$$

Подстановка по уравнению (3.7) дает

$$\frac{1}{u'^2} \frac{\partial}{\partial \xi_j} (Q_{i,j})_{A,B} = 3 \frac{f-g}{r^2} \xi_i + \frac{f-g}{r^2} \xi_j \delta_{ij} - 2 \frac{f-g}{r^3} \frac{\xi_j \xi_j}{r} \xi_i + \\ + \frac{1}{r^3} \left(\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\partial g}{\partial r} \right) \xi_j \xi_j \xi_i + \delta_{ij} \frac{\xi_j}{r} \frac{\partial g}{\partial r} = 0,$$

откуда

$$f(r) + \frac{r}{2} \frac{\partial f(r)}{\partial r} = g(r). \quad (3.9)$$

Эквивалентное интегральное соотношение имеет вид

$$f(r) = \frac{2}{r^2} \int_0^r r g(r) dr. \quad (3.10)$$

На рис. 3.4 дается экспериментальная проверка соотношения (3.9) по данным Кармана и Хауэрта [2].

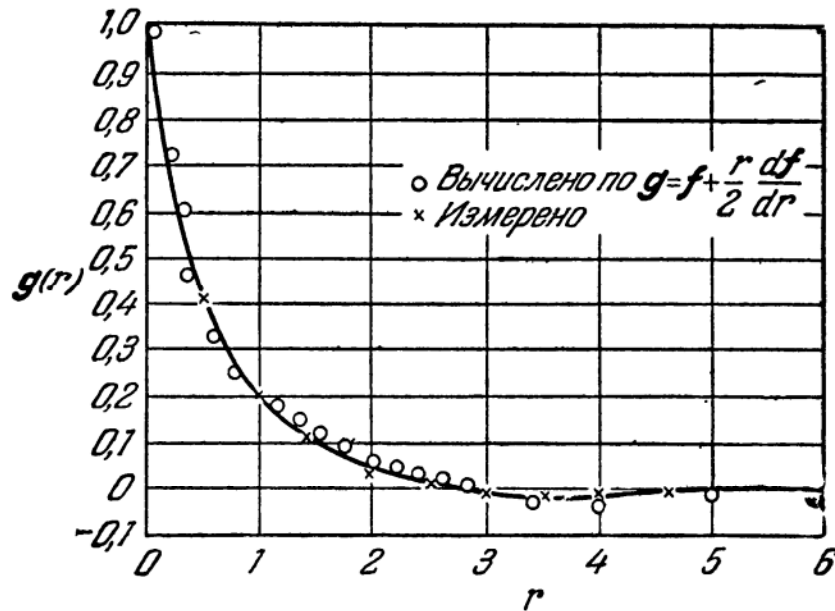


Рис. 3.4. К доказательству связи $f(r)$ с $g(r)$.

Карман [2] отмечает, что соотношение (3.9) идентично выражению для тензора напряжений в случае сферической симметрии. Тогда коэффициент корреляции $f(r)$ соответствует радиальной компоненте напряжения σ_r , а коэффициент корреляции $g(r)$ — тангенциальной компоненте напряжения σ_t . Условие неразрывности, на основании которого получено соотношение (3.9), соответствует условию равновесия. Чтобы показать это, рассмотрим условие равновесия в радиальном направлении элементарного объема $r^2 d\varphi d\psi dr$ (см. рис. 3.5):

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 d\varphi d\psi \sigma_r) dr - \sigma_t (r d\varphi dr) d\psi - \sigma_t (r d\psi dr) d\varphi = 0,$$

или

$$2r\sigma_r + r^2 \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = 2\sigma_t r,$$

или

$$\sigma_r + \frac{r}{2} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \sigma_t.$$

Из соотношения (3.9) между $f(r)$ и $g(r)$, которое получено на основании условия неразрывности для несжимаемой жидкости, следует, таким образом, что тензор двойных корреляций скорости $(Q_{i,j})_{A,B}$ может быть выражен всего лишь через одну скалярную величину, либо $f(r)$, либо $g(r)$, например:

$$(Q_{i,j})_{A,B} = u'^2 \left\{ -\frac{1}{2r} \frac{\partial f(r)}{\partial r} \xi_i \xi_j + \left[f(r) + \frac{r}{2} \frac{\partial f(r)}{\partial r} \right] \delta_{ij} \right\}. \quad (3.11)$$

На рис. 3.6 показаны кривые для $Q_{1,1}$ как функции параметра ξ_1/M при различных значениях ξ_2/M , полученные по измерениям Фавра, Гавильо и Дюма [3]. Эти авторы производили измерения на расстоянии $40M$ вниз по потоку от решетки с размером ячейки $M = 2,5$ см при скорости воздушного потока $12,27$ м/сек ($Re_M = 21\,500$).

Для кривых, соответствующих $\xi_2/M = 0,157$ и $\xi_2/M = 0,315$, приведены также точки, вычисленные согласно уравнению (3.11) по формуле

$$\begin{aligned} \frac{1}{u'^2} Q_{1,1} &= -\frac{1}{2r} \frac{\partial f(r)}{\partial r} \xi_1^2 + f(r) + \frac{r}{2} \frac{\partial f(r)}{\partial r} = \\ &= f(r) + \frac{r}{2} \frac{\partial f(r)}{\partial r} \left(1 - \frac{\xi_1^2}{r^2} \right), \end{aligned}$$

где $r^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$.

Нетрудно убедиться, что соответствие между экспериментальными и расчетными значениями, особенно в случае $\xi_2/M = 0,157$, вполне удовлетворительно.

Из уравнения (3.8) или (3.11) легко вывести выражение для

$$(Q_{i,i})_{A,B} = \overline{(u_i)_A (u_i)_B}.$$

Впоследствии мы воспользуемся этим частным значением $(Q_{i,i})_{A,B}$. Из соотношения (3.8) имеем

$$(Q_{i,i})_{A,B} = u'^2 [f(r) + 2g(r)],$$

а из (3.11)

$$(Q_{i,i})_{A,B} = u'^2 \left[3f(r) + r \frac{\partial f(r)}{\partial r} \right] = \frac{u'^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^3 f(r)]. \quad (3.12)$$

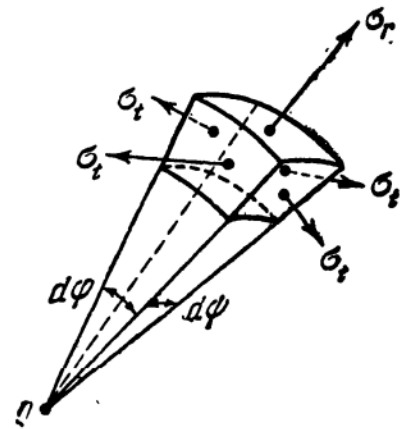


Рис. 3.5. Напряжения в случае сферической симметрии относительно точки O .

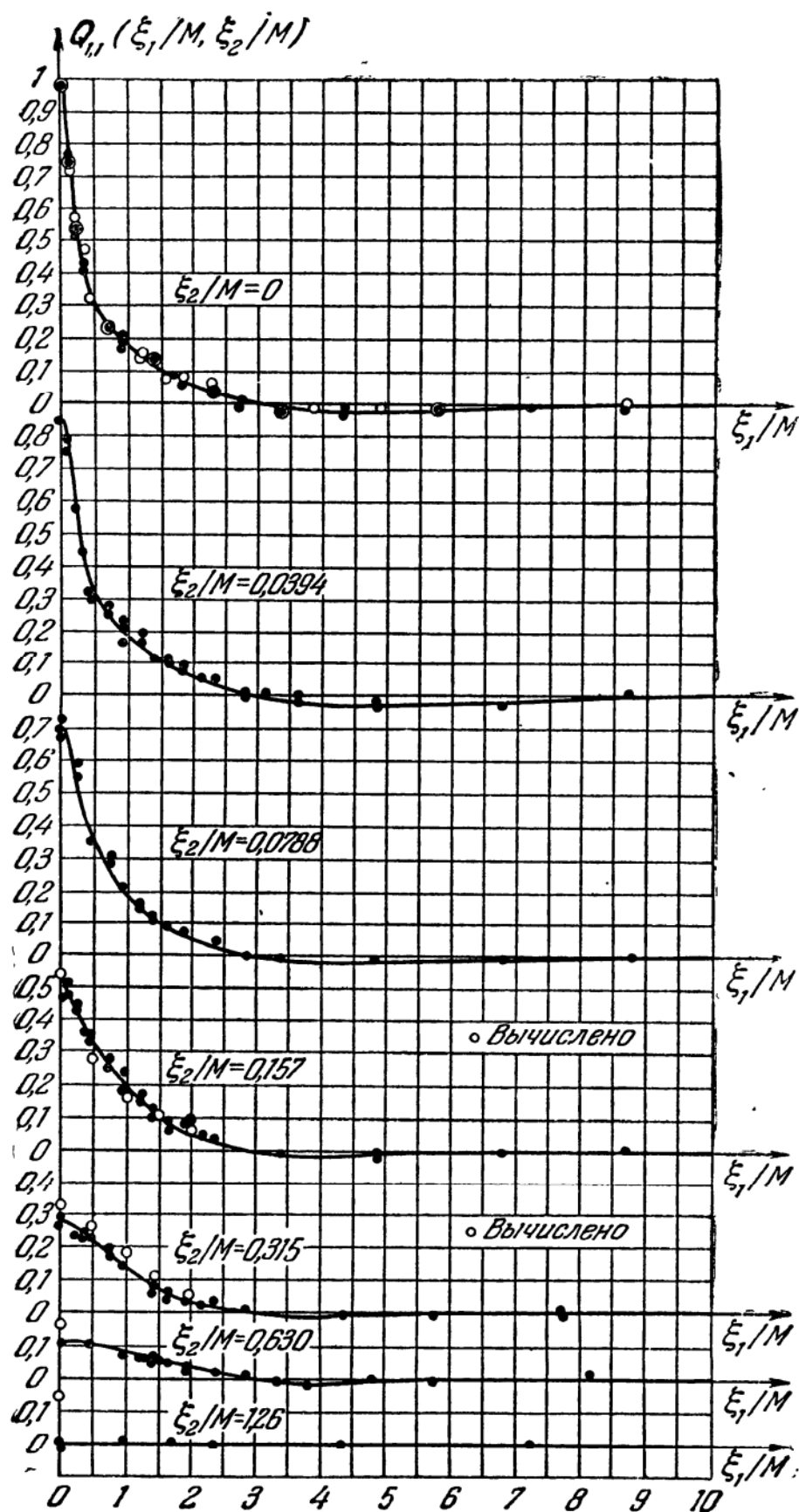


Рис. 3.6. Зависимость пространственной корреляции $Q_{11} = \overline{(u_1)_A (u_1)_B}$ от ξ_1 и ξ_2 [3].

Когда $A \equiv B$ и, значит, $r = 0$, эти соотношения дают: $Q_{i,i}(0) = 3u'^2 = 2 \times$ (кинетическая энергия на единицу массы).

В § 1.6 было показано, что $f(r)$ и $g(r)$ являются четными функциями r (это непосредственно следует также из приведенных выше соотношений между Q_1 и Q_2). Их разложения в ряд имеют вид

$$g(r) = 1 + \frac{r^2}{2!} \left[\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} \right]_{r=0} + \frac{r^4}{4!} \left[\frac{\partial^4 g}{\partial r^4} \right]_{r=0} + \dots \quad (3.13)$$

и

$$f(r) = 1 + \frac{r^2}{2!} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right]_{r=0} + \frac{r^4}{4!} \left[\frac{\partial^4 f}{\partial r^4} \right]_{r=0} + \dots \quad (3.14)$$

Подстановка формул (3.13) и (3.14) в (3.9) дает следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} \right]_{r=0} &= 2 \left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right]_{r=0}, \\ \left[\frac{\partial^4 g}{\partial r^4} \right]_{r=0} &= 3 \left[\frac{\partial^4 f}{\partial r^4} \right]_{r=0}, \\ &\dots \dots \dots \\ \left[\frac{\partial^{2n} g}{\partial r^{2n}} \right]_{r=0} &= (n+1) \left[\frac{\partial^{2n} f}{\partial r^{2n}} \right]_{r=0}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Из первого соотношения получаем связь между микромасштабами λ_g и λ_f :

$$\lambda_f = \lambda_g \sqrt{2}. \quad (3.16)$$

Теперь необходимо найти корреляции между производными от скоростей, а именно:

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)_A \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_e} \right)_B.$$

Поскольку дифференцирование в точке B не распространяется на $(u_i)_A$, как и дифференцирование в точке A — на $(u_j)_B$, то можно написать

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)_A \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_e} \right)_B} &= \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_A \left(\frac{\partial}{\partial x_e} \right)_B \overline{(u_i)_A (u_j)_B} = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_A \left(\frac{\partial}{\partial x_e} \right)_B (Q_{i,j})_{A,B} = - \frac{\partial^2}{\partial \xi_k \partial \xi_e} (Q_{i,j})_{A,B}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где $\xi_k = (x_k)_B - (x_k)_A$, так что $\left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_A = - \frac{\partial}{\partial \xi_k}$ и $\left(\frac{\partial}{\partial x_e} \right)_B = \frac{\partial}{\partial \xi_e}$.
Когда $A \equiv B$, имеем

$$\overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_e} \right)} = - \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi_k \partial \xi_e} (Q_{i,j}) \right]_{r=0}. \quad (3.18)$$

Путем двукратного дифференцирования $(Q_{i,j})_{A,B}$ с учетом соотношения (3.17) и использования разложения функции $f(r)$ в ряд (3.14) после некоторых преобразований получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \xi_k \partial \xi_e} (Q_{i,j})_{A,B} = & u'^2 \left(2\delta_{ke}\delta_{ij} - \frac{1}{2}\delta_{ie}\delta_{jk} - \frac{1}{2}\delta_{je}\delta_{ik} \right) \left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right]_{r=0} - \\ & - u'^2 \left(\frac{\delta_{ie}\delta_{jk} + \delta_{je}\delta_{ik} - 6\delta_{ke}\delta_{ij}}{12} + \right. \\ & \left. + \frac{\xi_i \xi_j \delta_{ke} + \xi_j \xi_k \delta_{ei} - 6\xi_k \xi_e \delta_{ij} + \xi_e \xi_i \delta_{jk} + \xi_e \xi_j \delta_{ik} + \xi_i \xi_k \delta_{je}}{6r^2} \right) \left[\frac{\partial^4 f}{\partial r^4} \right]_{r=0} r^2 + \dots \end{aligned} \quad (3.19)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_e} = & - \left(\frac{\partial^2 Q_{i,j}}{\partial \xi_k \partial \xi_e} \right)_{r=0} = \\ = & - u'^2 \left(2\delta_{ke}\delta_{ij} - \frac{1}{2}\delta_{ie}\delta_{jk} - \frac{1}{2}\delta_{je}\delta_{ik} \right) \left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right]_{r=0}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Из этого общего соотношения для частных значений i, j, k и e получим

$$\frac{1}{u'^2} \left[\frac{\partial^2 Q_{i,j}}{\partial \xi_k \partial \xi_e} \right]_{r=0} = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right]_{r=0}, \quad \text{если } i = j = k = e, \quad (3.21a)$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right]_{r=0}, \quad \begin{array}{l} \text{если } j = e \text{ и } i = k \\ \text{или } i = e \text{ и } j = k \\ \text{и } i \neq j, \end{array} \quad (3.21б)$$

$$= 2 \left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right]_{r=0}, \quad \begin{array}{l} \text{если } k = e \text{ и } i = j \\ \text{и } i \neq k, \end{array} \quad (3.21в)$$

$$= 0 \quad \text{для всех других сочетаний.} \quad (3.21г)$$

Корреляционный тензор $(S_{ik,j})_{A,B}$ третьего ранга. Тензор тройных корреляций $(u_i)_A (u_k)_A (u_j)_B$ имеет 27 компонент. Из произведения $(u_i)_A (u_k)_B$ можно образовать шесть различных комбинаций, соответствующих различным значениям i и k . Следовательно, из произведения $(u_i)_A (u_k)_A (u_j)_B$ может быть образовано 18 различных комбинаций, так что только 18 из 27 компонент тензора тройных корреляций различны.

Рассмотрим систему координат, ось x_1 которой проходит через точки A и B . Хотя в этом случае координатная система и имеет особое расположение относительно указанных точек, тем не менее последующее изложение носит общий характер.

Посредством отражения от одной из координатных плоскостей можно показать, что 13 компонент нашего тензора вследствие условия

инвариантности должны обратиться в нуль:

$$\begin{aligned}\overline{(u_1)_A^2 (u_2)_B} &= \overline{(u_1)_A^2 (u_3)_B} = 0, \\ \overline{(u_2)_A^2 (u_2)_B} &= \overline{(u_3)_A^2 (u_2)_B} = \overline{(u_3)_A^2 (u_3)_B} = \overline{(u_2)_A^2 (u_3)_B} = 0, \\ \overline{(u_1)_A (u_2)_A (u_1)_B} &= \overline{(u_1)_A (u_3)_A (u_1)_B} = 0, \\ \overline{(u_1)_A (u_2)_A (u_3)_B} &= \overline{(u_1)_A (u_3)_A (u_2)_B} = 0, \\ \overline{(u_2)_A (u_3)_A (u_1)_B} &= 0, \\ \overline{(u_2)_A (u_3)_A (u_2)_B} &= \overline{(u_2)_A (u_3)_A (u_3)_B} = 0.\end{aligned}$$

Таким образом, отличными от нуля остаются только следующие пять компонент: $\overline{(u_1)_A^2 (u_1)_B}$, $\overline{(u_1)_A (u_2)_A (u_2)_B}$, $\overline{(u_1)_A (u_3)_A (u_3)_B}$, $\overline{(u_2)_A^2 (u_1)_B}$ и $\overline{(u_3)_A^2 (u_1)_B}$. Из этих пяти компонент вторая и третья имеют одинаковую структуру, точно так же, как и четвертая с пятой. В § 1.5 для остающихся трех, различных и инвариантных, компонент тензора были уже введены следующие обозначения: $u'^3 k(r) = S_{11,1}$, $u'^3 h(r) = S_{22,1}$ и $u'^3 q(r) = S_{21,2}$.

Эти корреляции являются нечетными функциями r . Это можно легко показать, анализируя разложения этих функций в ряды. Поскольку коэффициенты при различных степенях r этих рядов представляют собой скалярные величины, они должны быть инвариантны.

Рассмотрим, к примеру, корреляцию $k(r)$:

$$k(r) = k(0) + r \left[\frac{\partial k}{\partial r} \right]_{r=0} + \frac{r^2}{2!} \left[\frac{\partial^2 k}{\partial r^2} \right]_{r=0} + \frac{r^3}{3!} \left[\frac{\partial^3 k}{\partial r^3} \right]_{r=0} + \dots$$

$$\text{где } k(0) = \frac{1}{u'^3} \overline{(u_1)_A^3},$$

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial k}{\partial r} \right]_{r=0} &= \frac{1}{u'^3} \overline{(u_1)_A^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial r} \right)_B} \Big|_{r=0} = \frac{1}{u'^3} \overline{(u_1)_A^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial r} \right)_A}, \\ \left[\frac{\partial^2 k}{\partial r^2} \right]_{r=0} &= \frac{1}{u'^3} \overline{(u_1)_A^2 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} \right)_A}, \\ &\dots \dots \dots\end{aligned}$$

Ввиду того, что величины $\overline{(u_1)_A^3}$, $\overline{(u_1)_A^2 (\partial^2 u_1 / \partial r^2)_A}$, $\overline{(u_1)_A^2 (\partial^4 u_1 / \partial r^4)_A}$ и т. д. при отражении изменяют свой знак, они должны быть нулями.

Инвариантными при отражении остаются: $\overline{(u_1)_A^2 (\partial u_1 / \partial r)_A}$, $\overline{(u_1)_A^2 (\partial^3 u_1 / \partial r^3)_A}$ и т. д. Но поскольку $(u_1)_A^3 = 0$, то и $(u_1)_A^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial r} \right)_A = 0$,

а значит, и $\left[\frac{\partial k}{\partial r} \right]_{r=0} = 0$. Отсюда

$$k(0) = \left[\frac{\partial k}{\partial r} \right]_{r=0} = \left[\frac{\partial^2 k}{\partial r^2} \right]_{r=0} = \left[\frac{\partial^4 k}{\partial r^4} \right]_{r=0} = \dots = \left[\frac{\partial^{2n} k}{\partial r^{2n}} \right]_{r=0} = 0,$$

НО

$$\left[\frac{\partial^3 k}{\partial r^3} \right]_{r=0} \neq 0 \dots \left[\frac{\partial^{2n+1} k}{\partial r^{2n+1}} \right]_{r=0} \neq 0.$$

Поэтому корреляция $k(r)$ является нечетной функцией r и ее разложение в ряд начинается с члена r^3 :

$$k(r) = \frac{r^3}{3!} \left[\frac{\partial^3 k}{\partial r^3} \right]_{r=0} + \frac{r^5}{5!} \left[\frac{\partial^5 k}{\partial r^5} \right]_{r=0} + \dots \quad (3.22)$$

Подобные результаты получаются также для $h(r)$ и $q(r)$.

На рис. 3.7 приводятся результаты измерений для корреляции $k(r)$, полученные Стюартом [4] в турбулентном потоке на расстоянии $30M$ вниз по течению от решетки. В опытах были использованы

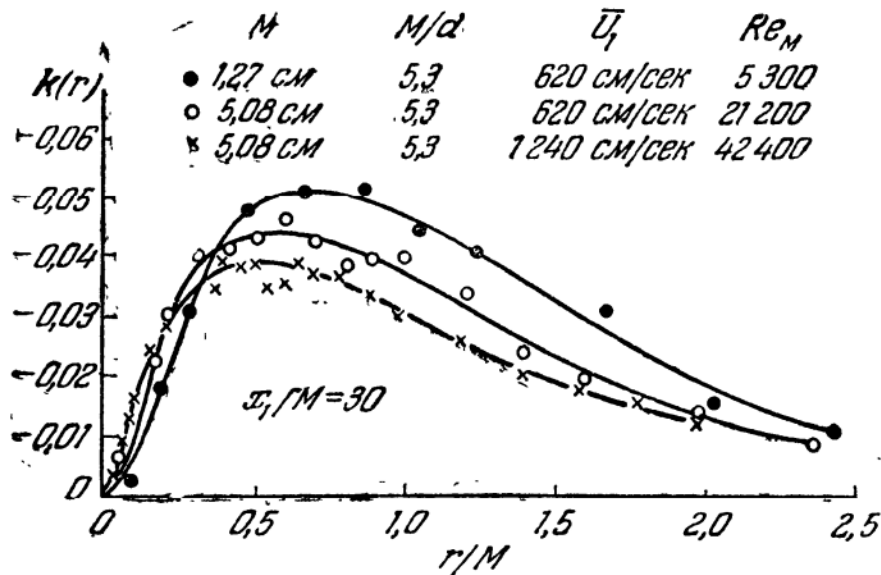


Рис. 3.7. Тройная корреляция $k(r)$ [4].

две решетки (с размером ячейки $M = 1,27$ и $5,08$ см), а измерения производились при двух значениях скорости потока (6,2 и 12,4 м/сек).

Естественно, полученный выше вывод о том, что тензор тройных корреляций имеет только три различные ненулевые компоненты, справедлив лишь при особом расположении точек A и B относительно системы координат. Однако при произвольном расположении этих точек любая компонента тензора тройных корреляций $(S_{ik,j})_{A,B}$ может быть выражена через корреляции $k(r)$, $h(r)$ и $q(r)$. Сейчас мы покажем это.

Рассмотрим скалярную величину (см. рис. 3.8)

$$S_{A,B} = \overline{u_A u_B} = (S_{ik,j})_{A,B} e_{ai} e_{ak} e_{bj}. \quad (3.23)$$

Здесь $S_{A,B}$ — однородная функция от ξ_i , e_{ai} , e_{ak} , e_{bj} , которая является трилинейной относительно величин e_{ai} , e_{ak} , e_{bj} . Члены,

входящие в $S_{A,B}$, являются скалярными комбинациями величин ξ_l , e_{ai} , e_{ak}° и e_{bj} . Всевозможные скалярные комбинации вплоть до членов, трилинейных относительно величин e_{ai} , e_{ak}° и e_{bj} , имеют вид

$$\begin{aligned} & \xi_l \xi_l, \quad \xi_l e_{ai}, \quad \xi_k e_{ak}^\circ, \quad \xi_j e_{bj}, \\ & \delta_{ik} e_{ai} e_{ak}^\circ, \quad \delta_{ij} e_{ai} e_{bj}, \quad \delta_{kj} e_{ak}^\circ e_{bj}, \\ & \varepsilon_{ikj} e_{ai} e_{ak}^\circ e_{bj}, \quad \varepsilon_{lik} \xi_l e_{ai} e_{ak}^\circ, \quad \varepsilon_{lij} \xi_l e_{ai} e_{bj}, \quad \varepsilon_{lkj} \xi_l e_{ak}^\circ e_{bj}, \\ & \varepsilon_{lim} \varepsilon_{kjm} \xi_l e_{ai} e_{ak}^\circ e_{bj}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\varepsilon_{lim} \varepsilon_{kjm} \xi_l = (\delta_{lk} \delta_{ij} - \delta_{lj} \delta_{ik}) \xi_l = \delta_{ij} \xi_k - \delta_{ik} \xi_j,$$

получаем

$$\varepsilon_{lim} \varepsilon_{kjm} \xi_l e_{ai} e_{ak}^\circ e_{bj} = (\delta_{ij} \xi_k - \delta_{ik} \xi_j) e_{ai} e_{ak}^\circ e_{bj}.$$

Следовательно, однородный трилинейный относительно e_{ai} , e_{ak}° и e_{bj} многочлен записывается в виде

$$\begin{aligned} S_{A,B} = & (S_1 \xi_l \xi_k \xi_j + S_2 \xi_j \delta_{ik} + S_3 \xi_k \delta_{ij} + S_4 \xi_i \delta_{kj} + S_5 \varepsilon_{ikj} + \\ & + S_6 \varepsilon_{lik} \xi_l \xi_j + S_7 \varepsilon_{lij} \xi_l \xi_k + S_8 \varepsilon_{lkj} \xi_l \xi_i) e_{ai} e_{ak}^\circ e_{bj}. \end{aligned}$$

Здесь величины S_1 и т. д. до S_8 — функции от r^2 .

Для рассмотренного выше случая особого расположения точек A и B относительно системы координат было показано, что тензор

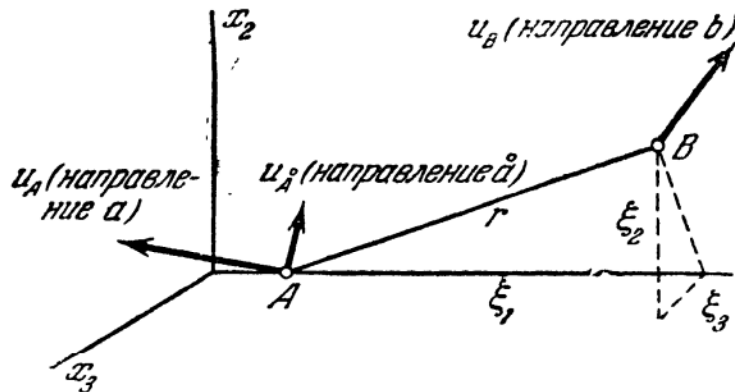


Рис. 3.8. Тройная корреляция $S_{A,B} = \overline{u_A u_A^o u_B}$.

$(S_{lk,j})_{A,B}$ составляется всего лишь из трех различных корреляций $k(r)$, $h(r)$ и $q(r)$, которые являются нечетными функциями r . Но вследствие того, что свойства тензора не зависят от использованной системы координат, тензор $(S_{lk,j})_{A,B}$ должен быть нечетной функцией r в любой системе координат.

Следовательно, в записанном выше многочлене слагаемые, которые являются четными относительно r , должны обращаться в нуль, т. е.

$$S_5 = S_6 = S_7 = S_8 = 0;$$

более того, так как $(S_{ik, j})_{A, B} = (S_{kl, j})_{A, B}$, имеем $S_3 = S_4$. Отсюда

$$(S_{ik, j})_{A, B} = S_1 \xi_i \xi_k \xi_j + S_2 \xi_j \delta_{ik} + S_3 (\xi_k \delta_{ij} + \xi_i \delta_{kj}). \quad (3.24)$$

Это — общее выражение для изотропного тензора третьего ранга.

Если систему координат снова выбрать так, чтобы ось x_1 проходила через точки A и B и, значит, $\xi_1 = r$, $\xi_2 = \xi_3 = 0$, то легко убедиться в том, что из соотношения (3.24) следует

$$u'^3 k(r) = S_{11, 1} = S_1 r^3 + r(S_2 + 2S_3),$$

$$u'^3 h(r) = S_{22, 1} = S_2 r,$$

$$u'^3 q(r) = S_{21, 2} = S_3 r,$$

или

$$S_1 = u'^3 \left[\frac{k(r)}{r^3} - \frac{h(r)}{r^3} - \frac{2q(r)}{r^3} \right],$$

$$S_2 = u'^3 \frac{h(r)}{r},$$

$$S_3 = u'^3 \frac{q(r)}{r}.$$

Следовательно,

$$(S_{ik, j})_{A, B} = u'^3 \left[(k - h - 2q) \frac{\xi_i \xi_k \xi_j}{r^3} + \delta_{ik} h \frac{\xi_j}{r} + q \left(\delta_{ij} \frac{\xi_k}{r} + \delta_{kj} \frac{\xi_i}{r} \right) \right]. \quad (3.25)$$

В случае несжимаемой жидкости дивергенция тензора $(S_{ik, j})_{A, B}$ тоже должна обращаться в нуль:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} (S_{ik, j})_{A, B} = 0. \quad (3.26)$$

Подстановка выражения (3.25) в формулу (3.26) после дифференцирования дает

$$\begin{aligned} \frac{1}{u'^3} \frac{\partial}{\partial \xi_j} (S_{ik, j})_{A, B} = & \frac{\xi_i \xi_k}{r^2} \left(\frac{\partial k}{\partial r} - \frac{\partial h}{\partial r} + 2 \frac{k - h - 3q}{r} \right) + \\ & + \delta_{ik} \left(\frac{\partial h}{\partial r} + \frac{2h}{r} + \frac{2q}{r} \right) = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{\partial h}{\partial r} + \frac{2h}{r} + \frac{2q}{r} = 0,$$

и

$$\frac{\partial k}{\partial r} - \frac{\partial h}{\partial r} + 2 \frac{k - h - 3q}{r} = 0,$$

или, после несложных преобразований,

$$q = -\frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} (hr^2), \quad (3.27a)$$

$$q = \frac{1}{4r} \frac{\partial}{\partial r} (kr^2), \quad (3.27б)$$

$$h = -\frac{1}{2} k. \quad (3.27в)$$

Отсюда следует, что в случае несжимаемой жидкости изотропный тензор тройных корреляций можно выразить через единственную скалярную величину, скажем, $k(r)$:

$$(S_{ik,j})_{A,B} = u'^3 \left[\left(k - r \frac{\partial k}{\partial r} \right) \frac{\xi_i \xi_k \xi_j}{2r^3} - \frac{k}{2} \delta_{ik} \frac{\xi_j}{r} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 k) \left(\delta_{ij} \frac{\xi_k}{r} + \delta_{kj} \frac{\xi_i}{r} \right) \right]. \quad (3.28)$$

§ 3.3. Дифференциальное уравнение динамики изотропной турбулентности

В § 1.5 для тензора $(Q_{i,j})_{A,B}$ было выведено дифференциальное уравнение (1.43), которое содержит также члены с пространственными производными от корреляционных тензоров $(K_{i,p})_{A,B}$, $(K_{p,j})_{A,B}$, $(S_{ik,j})_{A,B}$ и $(S_{i,kj})_{A,B}$.

В предыдущем параграфе было показано, что при изотропной турбулентности в несжимаемой жидкости двойные корреляции между давлением и скоростью обращаются в нуль, а каждый из корреляционных тензоров $(Q_{i,j})_{A,B}$ и $(S_{ik,j})_{A,B}$ может быть выражен через один определяющий скаляр, например соответственно $f(r, t)$ и $k(r, t)$.

Далее, в случае изотропной турбулентности из условия инвариантности относительно отражения от точки A следует, что

$$\overline{(u_i)_A (u_k)_B (u_j)_B} = -\overline{(u_k)_A (u_j)_A (u_i)_B},$$

или

$$(S_{i,kj})_{A,B} = -(S_{kj,i})_{A,B}. \quad (3.29)$$

Для изотропной турбулентности в несжимаемой жидкости дифференциальное уравнение (1.43) упрощается:

$$\frac{\partial}{\partial t} (Q_{i,j})_{A,B} - \frac{\partial}{\partial \xi_k} [(S_{ik,j})_{A,B} + (S_{kj,i})_{A,B}] = 2\nu \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_l} (Q_{l,j})_{A,B}. \quad (3.30)$$

Второй член в левой части этого уравнения представляет собой тензор второго ранга, который мы обозначим через $S_{i,j}$:

$$(S_{i,j})_{A,B} = \frac{\partial}{\partial \xi_k} [(S_{ik,j})_{A,B} + (S_{kj,i})_{A,B}], \quad (3.31)$$

так что

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_{i,j} - S_{i,j} = 2\nu \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_j} Q_{i,j}. \quad (3.32)$$

Поскольку, согласно соотношению (3.28), величина $S_{ik,j}$ определяется единственным скаляром $k(r, t)$, тензор $S_{i,j}$ также определяется этим скаляром. Из уравнения (3.28) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_k} S_{ik,j} = u'^3 & \left[\left(-\frac{1}{4r} \frac{\partial^2 k}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial k}{\partial r} + \frac{k}{r^3} \right) \xi_i \xi_j + \right. \\ & \left. + \left(\frac{r}{4} \frac{\partial^2 k}{\partial r^2} + \frac{3}{2} \frac{\partial k}{\partial r} + \frac{k}{r} \right) \delta_{ij} \right]; \end{aligned}$$

из уравнения относительно $S_{kj,i}$, которое соответствует уравнению (3.28), имеем такой же результат и для величины $\frac{\partial}{\partial \xi_k} S_{kj,i}$.

Отсюда

$$\begin{aligned} S_{i,j} = u'^3 & \left[\left(-\frac{1}{2r} \frac{\partial^2 k}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial k}{\partial r} + \frac{2k}{r^3} \right) \xi_i \xi_j + \right. \\ & \left. + \left(\frac{r}{2} \frac{\partial^2 k}{\partial r^2} + 3 \frac{\partial k}{\partial r} + \frac{2k}{r} \right) \delta_{ij} \right]. \quad (3.33) \end{aligned}$$

Если произвести свертывание индексов, то это выражение можно свести к следующему:

$$S_{i,i} = u'^3 \left(r \frac{\partial^2 k}{\partial r^2} + 7 \frac{\partial k}{\partial r} + 8 \frac{k}{r} \right) = u'^3 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \frac{\partial k}{\partial r} + 4r^2 k \right). \quad (3.34)$$

В этом случае дифференциальное уравнение для $Q_{i,i}$ и $S_{i,i}$, соответствующее уравнению (3.32), запишется так:

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_{i,i}(r, t) - S_{i,i}(r, t) = 2\nu \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial}{\partial r} Q_{i,i}(r, t) \right]. \quad (3.35)$$

Интересно отметить, что это соотношение, если его рассматривать как уравнение распространения тепла, описывает теплопередачу в трехмерном пространстве. При этом член $S_{i,i}$ должен представлять конвективный перенос тепла (или может интерпретироваться как некоторая обменная функция); его происхождение можно считать связанным с взаимодействием вихрей.

Из уравнения (3.35) нетрудно вывести дифференциальное уравнение для $f(r, t)$ и $k(r, t)$; для этого введем в уравнение (3.35) выражения (3.12) для $Q_{i,i}$ и (3.34) для $S_{i,i}$, имея при этом в виду, что u' зависит только от времени:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{u'^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^3 f) \right] - \frac{u'^3}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \frac{\partial k}{\partial r} + 4r^2 k \right) = \\ = 2 \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{u'^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^3 f) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Интегрирование по r дает

$$\frac{\partial}{\partial t}(u'^2 f) - u'^3 \left(\frac{\partial k}{\partial r} + \frac{4}{r} k \right) = 2\nu u'^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^3 f) \right]$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}(u'^2 f) - u'^3 \frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} (r^4 k) = 2\nu u'^2 \frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^4 \frac{\partial f}{\partial r} \right). \quad (3.36)$$

Постоянная интегрирования должна быть равна нулю, потому что функции $f(r, t)$ и $k(r, t)$, а также их производные при $r = 0$ должны оставаться конечными.

Дифференциальное уравнение (3.36) впервые было получено Карманом и Хауэртом [2], и поэтому его обычно называют уравнением Кармана — Хауэрта.

Если соотношение (3.36) опять-таки рассматривать как уравнение распространения тепла или вещества, то оно, в отличие от соотношения (3.35), описывает процесс в пространстве пяти измерений.

Довольно часто вместо корреляции $k(r, t)$ используется корреляция $h(r, t)$. Ввиду того, что, согласно соотношению (3.27в), $k(r, t) = -2h(r, t)$, уравнение для $h(r, t)$ записывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(u'^2 f) + u'^3 \frac{2}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} (r^4 h) = 2\nu u'^2 \frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^4 \frac{\partial f}{\partial r} \right). \quad (3.37)$$

Уравнение (3.35) или (3.36) используется в качестве исходного соотношения при изучении динамики изотропной турбулентности. Если попытаться решить эти уравнения, то сразу же придется столкнуться с тем затруднением, что каждое из них содержит две переменные. Так, соотношение (3.36), рассматриваемое как уравнение относительно $u'^2 f(r, t)$, содержит в дополнение член с тройной корреляцией $u'^3 k(r, t)$, которая пока является неизвестной функцией. Как указывалось в главе 1, эта особенность представляет собой одну из основных трудностей в решении проблемы турбулентности, если подходить к ней с точки зрения современной статистической теории: неизвестных имеется больше, чем уравнений.

Конечно, отправляясь снова от уравнения движения, можно вывести уравнение, описывающее поведение корреляции $k(r, t)$, но такое уравнение будет содержать корреляции скорости четвертого порядка, которые образуют неизвестную функцию в уравнении для $k(r, t)$. Эту процедуру можно продолжить, вводя в рассмотрение динамическое уравнение для корреляции скорости четвертого порядка, которое будет содержать в качестве неизвестной величины новую зависимую переменную — корреляцию скоростей в двух точках, имеющую пятый порядок, и т. д. В конечном счете мы получили бы бесконечное число уравнений, но все же на одно меньше, чем число зависимых переменных.

Дополнительная трудность состоит в том, что для корреляций более высокого порядка будет требоваться все больше определяющих скаляров, так что число членов в рассматриваемых динамических уравнениях будет неограниченно возрастать. Поэтому изложенный выше статистический подход к описанию динамики турбулентности формально приводит к расходящемуся процессу. В то же время можно полагать, что, чем выше порядок корреляций скорости, тем меньше их роль в суммарном описании статистического поведения турбулентности. Например, как показал Бэтчелор [11], представляется возможным сделать это описание с достаточной степенью приближения полным посредством рассмотрения лишь конечного числа корреляций скорости (хотя это число и может быть велико) и равного ему числа динамических уравнений. Это обусловлено тем, что для определения величины следующей по порядку корреляции скорости относительно нее, несомненно, можно принять соответствующее предположение.

Подобный подход был использован Чжоу [55] при исследовании напорного турбулентного течения в плоском канале. Он показал, что дивергенция двойной корреляции скорости, содержащаяся в динамическом уравнении для тройной корреляции скорости, мала по сравнению с тройной корреляцией между пульсацией градиента давления и пульсациями скорости, и поэтому ею можно пренебречь.

Аналогичное исследование было проведено Дайслером [56] в его недавно опубликованной работе о вырождении однородной турбулентности перед конечной стадией.

Обычный метод решения уравнений (3.35) и (3.36) состоит в принятии некоторых предположений относительно корреляций, основанных на принципе подобия и статистических или физических соображениях. Исходя из условий подобия или автомодельности, пока оказалось возможным получить решения лишь для вырождения интенсивности турбулентности. Нам придется иметь дело с этими решениями в следующем параграфе. До сих пор еще не удалось получить полного решения для $Q_{l,i}(r, t)$ или $u'^2 f(r, t)$, за исключением одного предельного случая, когда влияние «конвективного» члена, представленного тройными корреляциями скорости, пренебрежимо мало по сравнению с двумя другими членами. Однако этот случай можно отнести к описанию асимптотического поведения турбулентности при доминирующем влиянии вязкости. Выше уже говорилось, что происхождение «конвективного» члена следует считать связанным с взаимодействием между вихрями.

Поскольку это взаимодействие является существенной особенностью турбулентности, то может возникнуть вопрос, должен ли этот предельный «вязкий» случай считаться еще относящимся к турбулентности.

В этом предельном случае легко можно получить решение для $u'^2 f(r, t)$. Однако, прежде чем дать это решение, нам хотелось бы обсудить одно общее свойство, которое непосредственно вытекает из уравнений (3.35) и (3.36).

Возьмем от каждого из членов уравнения (3.35) вторые моменты

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\infty} r^2 Q_{i,i} dr - \int_0^{\infty} r^2 S_{i,i} dr = 2\nu \left(r^2 \frac{\partial Q_{i,i}}{\partial r} \right) \Big|_0^{\infty}.$$

Ниже будет показано, что при определенных предположениях условие неразрывности для несжимаемой жидкости имеет своим следствием соотношение

$$\int_0^{\infty} r^2 Q_{i,i} dr = 0, \quad \int_0^{\infty} r^2 S_{i,i} dr = 0.$$

Таким образом, из преобразованного уравнения вытекает, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \frac{\partial Q_{i,i}}{\partial r} = 0. \quad (3.38)$$

Это соотношение показывает по крайней мере, насколько быстро должна уменьшаться величина $Q_{i,i}$ с возрастанием r .

Аналогичный подход можно применить теперь к уравнению (3.36), с той лишь разницей, что вместо вторых моментов на этот раз следует взять четвертые:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(u'^2 \int_0^{\infty} r^4 f dr \right) - (u'^3 r^4 k) \Big|_0^{\infty} = 2\nu u'^2 \left(r^4 \frac{\partial f}{\partial r} \right) \Big|_0^{\infty}.$$

Впоследствии будет показано, что по крайней мере

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(r^4 \frac{\partial f}{\partial r} \right) = 0.$$

Что касается члена $r^4 k$, то его обычно тоже полагают стремящимся к нулю, когда r неограниченно возрастает. Вообще говоря, принято считать, что все корреляции скорости при однородной турбулентности на больших расстояниях между двумя точками убывают по экспоненциальному закону. Это предположение было высказано также Лойцянским [5]; отсюда им был получен вывод о том, что величина

$$u'^2 \int_0^{\infty} r^4 f(r, t) dr \quad (3.39)$$

должна быть инвариантна. Поэтому обычно этот интеграл называют «инвариантом Лойцянского».

Если соотношение (3.36) рассматривать как уравнение распространения тепла в пятимерном пространстве, то инвариантность величины (3.39) можно интерпретировать как условие сохранения полного количества тепла в пятимерном пространстве. Интерпретация, предложенная Лойцянским, состоит в том, что интеграл (3.39) дает полную величину возмущения, вносимого турбулизирующей системой, и, стало быть, величина подобного возмущения должна оставаться постоянной во времени.

Бэтчелор и Праудмен [50] недавно показали, что предположение относительно интенсивности убывания корреляций скорости с увеличением расстояния между двумя точками не всегда оказывается справедливым и что, в частности, предел $\lim_{r \rightarrow \infty} (r^4 k)$ отличен от нуля.

Следовательно, если пользоваться уравнением (3.36) в полном виде, включая инерционный член $r^4 k$, то интеграл Лойцянского (3.39) становится неинвариантным. К этому вопросу мы еще вернемся ниже.

Рассмотрим теперь решение уравнения (3.35) или (3.36) в предельном случае, когда влияние вязкости становится преобладающим и поэтому вторым членом в левой части уравнения можно пренебречь. При этом достаточно проанализировать только одно из этих уравнений, поскольку соответствующие решения сходны друг с другом.

Мы рассмотрим здесь уравнение (3.35), которое в интересующем нас предельном случае записывается следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_{i,i}(r, t) = 2\nu \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial Q_{i,i}(r, t)}{\partial r} \right]. \quad (3.40)$$

Это — хорошо известное уравнение теплопроводности или диффузии вещества в пространстве при наличии сферической симметрии. Обычный метод решения этого дифференциального уравнения состоит в предположении о том, что $Q_{i,i}(r, t)$ — функция только от $\chi = r/\sqrt{\nu t}$. И в самом деле, при этом получают фундаментальные решения, выражаемые через $\exp(-r^2/8\nu t)$. Однако легко убедиться, что если по уравнению (3.12), зная $Q_{i,i}(r, t)$, вычислить $u'^2 f(r, t)$, то эти решения дают такие значения $u'^2 f(r, t)$, которые при $r=0$ не являются конечными.

Поскольку в соотношении (3.12) величина u'^2 зависит только от t , то предположение о том, что $Q_{i,i}(r, t)$ является функцией только χ , представляется неоправданным. Подобное предположение более пригодно для коэффициента корреляции $f(r, t)$.

Поэтому целесообразнее, по-видимому, следовать Агостини и Бэссу [6], которые воспользовались предположением о том, что

$$Q_{i,i}(r, t) = \varphi(t) \psi(\chi), \quad (3.41)$$

где $\chi = r/\sqrt{8\nu t}$. Подстановка выражения (3.41) в соотношение (3.40) после разделения переменных приводит к двум дифференциальным уравнениям:

$$\frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\alpha}{t},$$

решением которого является $\varphi = \text{const } t^{-\alpha}$, и

$$\chi \frac{d^2\psi}{d\chi^2} + 2(\chi^2 + 1) \frac{d\psi}{d\chi} + 4\alpha\chi\psi = 0.$$

Приняв $\alpha = (2p + 1)/2$, где p — целое число, Агостини и Бэсс получили следующее решение:

$$\psi_p = \frac{1}{\chi} \exp(-\chi^2) H_{2p-1}(\chi),$$

где $H_n(\chi)$ — полином Эрмита:

$$H_n(\chi) = (-1)^n \exp(\chi^2) \frac{d^n}{d\chi^n} \exp(-\chi^2).$$

Следовательно,

$$H_0(\chi) = 1; \quad H_1(\chi) = 2\chi; \quad H_2(\chi) = 4\chi^2 - 2; \quad H_3(\chi) = 8\chi^3 - 12\chi.$$

Тогда общее решение уравнения (3.40), подчиненное перечисленным выше условиям, имеет вид

$$Q_{i,i}(r, t) = \frac{\sqrt{8\nu}}{r} \exp\left(-\frac{r^2}{8\nu t}\right) \sum_1^{\infty} \frac{A_p}{t^p} H_{2p-1}\left(\frac{r}{\sqrt{8\nu t}}\right). \quad (3.42)$$

Постоянные A_p должны быть выбраны так, чтобы этот ряд был сходящимся и $Q_{i,i}(0, t) = 3u'^2$.

Если наложить условие

$$\int_0^{\infty} r^2 Q_{i,i}(r, t) dr = 0,$$

то нетрудно убедиться, что ему удовлетворяют все члены уравнения (3.42), за исключением члена, соответствующего $p = 1$; следовательно, коэффициент A_1 должен быть равен нулю.

Кроме того, из соответствующего решения для $f(r, t)$ следует, что:

1. Если $p = 1$, то решение при $r = 0$ не сходится к конечной величине; для его сходимости также требуется, чтобы $A_1 = 0$.

2. В интеграл Лойцянского (3.39) входит только член, соответствующий $p = 2$; все остальные члены в этот интеграл не входят.

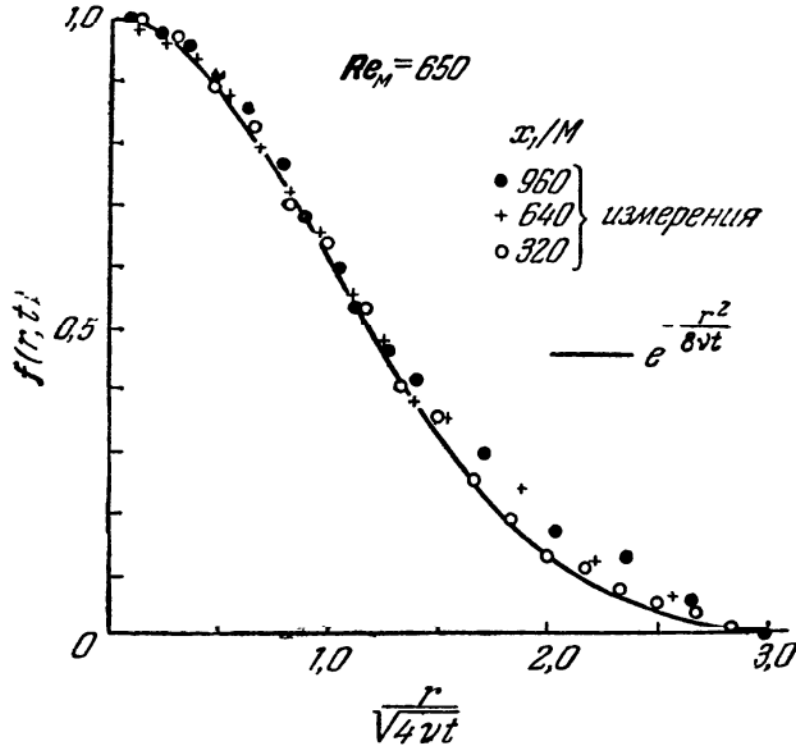


Рис. 3.9. Коэффициент продольной корреляции скорости $f(r, t)$ на конечной стадии вырождения [7].

Следовательно, если рассматривать в дальнейшем только частное решение уравнения (3.40), соответствующее $p = 2$, то выражение (3.42) сводится к формуле

$$Q_{i,i}(r, t) = -\frac{4A_2}{t^{5/2}} \left(3 - \frac{r^2}{4\nu t} \right) \exp\left(-\frac{r^2}{8\nu t}\right).$$

Условие $Q_{i,i}(0, t) = 3u'^2$ дает

$$u'^2 = -4A_2 t^{5/2} = \text{const } t^{-5/2} \quad (3.43)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} Q_{i,i}(r, t) &= \text{const } t^{-5/2} \left(3 - \frac{r^2}{4\nu t} \right) \exp\left(-\frac{r^2}{8\nu t}\right) = \\ &= u'^2 \left(3 - \frac{r^2}{4\nu t} \right) \exp\left(-\frac{r^2}{8\nu t}\right). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Из уравнений (3.12) и (3.44) получаем следующее выражение для функции $f(r, t)$:

$$f(r, t) = \exp\left(-\frac{r^2}{8\nu t}\right). \quad (3.45)$$

Таким образом, соотношение (3.43) дает закон вырождения турбулентности для случая доминирующего влияния вязкости; при этом коэффициент двойной корреляции $f(r, t)$ описывается гауссовой кривой ошибок и при вырождении остается автомодельным. Измерения, произведенные Бэтчелором и Таунсендом [7], показали, что на конечной стадии вырождения, когда турбулентные движения по своей природе являются целиком вязкими, соответствие опытных данных гауссовой кривой ошибок в самом деле оказывается очень близким (см. рис. 3.9).

Если по уравнениям (3.43) и (3.45) вычислить величину интеграла Лойцянского (3.39), то можно сделать вывод, что в случае доминирующего влияния вязкости этот интеграл является точным инвариантом относительно времени.

§ 3.4. Пространственный энергетический спектр

В § 1.12 мы рассмотрели одномерный энергетический спектр $E_1(n)$ пульсаций скорости u_1 в том виде, как он регистрируется соответствующей измерительной аппаратурой, например, термоанемометром: Эта спектральная функция $E_1(n)$ была определена уравнением (1.86).

$$\int_0^{\infty} E_1(n) dn = \overline{u_1^2}. \quad (1.86)$$

Тэйлор показал, что функции $E_1(n)$ и $u'^2 f(x_1)$ представляют собой четные преобразования Фурье, которые в случае, когда поле турбулентного течения имеет постоянную скорость $\bar{U}_1$, значительно превышающую u' , записываются следующим образом [см. уравнения (1.90) и (1.91)]:

$$f(x_1) = \frac{1}{u'^2} \int_0^{\infty} E_1(n) \cos \frac{2\pi n x_1}{\bar{U}_1} dn \quad (3.46)$$

и

$$E_1(n) = \frac{4u'^2}{\bar{U}_1} \int_0^{\infty} f(x_1) \cos \frac{2\pi n x_1}{\bar{U}_1} dx_1. \quad (3.46a)$$

Если принять во внимание трехмерный характер турбулентности, то станет очевидным, что и энергетический спектр тоже должен быть трехмерным. То, что в действительности измеряется с помощью термоанемометра, представляет собой, строго говоря, лишь одномерное сечение пространственного спектра.

Поэтому для более тщательного анализа пространственной структуры необходимо проанализировать пространственный спектр более подробно.

С этой целью рассмотрим пространственную структуру в данный момент времени, какой она представляется наблюдателю, неподвижному относительно этого поля. В этом случае вместо частоты n удобнее пользоваться волновым числом $k_1 = 2\pi n / \bar{U}_1$, а вместо $E_1(n)$ ввести спектральную функцию $E_1(k_1)$. Представляется целесообразным определить эту функцию следующим выражением:

$$E_1(k_1) = \frac{\bar{U}_1}{2\pi} E_1(n), \quad (3.47)$$

откуда

$$\int_0^\infty E_1(k_1) dk_1 = \bar{u}_1^2, \quad (3.48)$$

что аналогично соотношению (1.86). Связь между спектральной функцией $E_1(k_1)$ для продольных пульсаций скорости и продольной корреляцией скорости $f(x_1)$ дается следующим выражением:

$$u'^2 f(x_1) = \int_0^\infty E_1(k_1) \cos k_1 x_1 dk_1, \quad (3.49)$$

откуда после применения четного преобразования Фурье имеем

$$E_1(k_1) = \frac{2}{\pi} u'^2 \int_0^\infty f(x_1) \cos k_1 x_1 dx_1. \quad (3.50)$$

Поскольку функции $f(x_1)$ и $E_1(k_1)$ симметричны, то можем также записать

$$\begin{aligned} u'^2 f(x_1) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty E_1(k_1) [\exp(ik_1 x_1) + \exp(-ik_1 x_1)] dk_1 = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} E_1(k_1) \exp(ik_1 x_1) dk_1 \end{aligned} \quad (3.51)$$

и

$$E_1(k_1) = \frac{1}{\pi} u'^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1) \exp(-ik_1 x_1) dx_1, \quad (3.51a)$$

где $i = \sqrt{-1}$. Аналогично можно ввести спектральную функцию $E_2(k_1)$ для поперечных пульсаций скорости, которая связана с поперечной корреляцией скорости $g(x_1)$ соотношением

$$u'^2 g(x_1) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} E_2(k_1) \exp(ik_1 x_1) dk_1, \quad (3.52)$$

для которого четное преобразование Фурье имеет вид

$$E_2(k_1) = \frac{1}{\pi} u'^2 \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1) \exp(-ik_1 x_1) dx_1. \quad (3.52a)$$

Ввиду того, что корреляции $f(x_1)$ и $g(x_1)$ различны, соответствующие одномерные спектральные функции $E_1(k_1)$ и $E_2(k_1)$ также отличаются друг от друга, хотя

$$\int_0^{\infty} E_2(k_1) dk_1 = \int_0^{\infty} E_1(k_1) dk_1 = \overline{u^2}.$$

Связь между функциями $E_2(k_1)$ и $E_1(k_1)$ легко можно получить из соотношения (3.9) между $f(x_1)$ и $g(x_1)$. Подстановка уравнений (3.51) и (3.52) в формулу (3.9) дает

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} E_2(k_1) \exp(ik_1 x_1) dk_1 &= \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} E_1(k_1) \exp(ik_1 x_1) dk_1 + \frac{x_1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} k_1 l E_1(k_1) \exp(ik_1 x_1) dk_1 = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} E_1(k_1) \exp(ik_1 x_1) dk_1 + \frac{1}{2} \exp(ik_1 x_1) k_1 E_1(k_1) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \\ &- \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[k_1 \frac{\partial E_1(k_1)}{\partial k_1} + E_1(k_1) \right] \exp(ik_1 x_1) dk_1 = \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} E_1(k_1) \exp(ik_1 x_1) dk_1 - \int_{-\infty}^{+\infty} k_1 \frac{\partial E_1(k_1)}{\partial k_1} \exp(ik_1 x_1) dk_1 \right]. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались следующим свойством функции $E_1(k_1)$:

$$\lim_{k_1 \rightarrow \infty} k_1 E_1(k_1) = 0,$$

которое является следствием условия существования интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |E_1(k_1)| dk_1.$$

Отсюда

$$E_2(k_1) = \frac{1}{2} \left[E_1(k_1) - k_1 \frac{\partial E_1(k_1)}{\partial k_1} \right]. \quad (3.53)$$

Обобщим теперь наш анализ на случай трехмерной спектральной функции. Вместо скалярных корреляций $f(x_1)$ и $g(x_1)$ рассмотрим корреляционный тензор $Q_{i,j}$ и определим его преобразование Фурье, тензор энергетического спектра $E_{i,j}$, так, чтобы

$$\begin{aligned} Q_{i,j}(x_1, x_2, x_3, t) &= \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t) \exp[i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3)] dk_1 dk_2 dk_3, \end{aligned} \quad (3.54)$$

причем здесь

$$E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t) = E_{i,j}(-k_1, -k_2, -k_3, t).$$

После обращения имеем

$$\begin{aligned} E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t) &= \\ &= \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Q_{i,j}(x_1, x_2, x_3, t) \exp[-i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3)] dx_1 dx_2 dx_3. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Поскольку турбулентность является изотропной и однородной, то целесообразно ввести в рассмотрение волновое число k и расстояние r , а вместо $Q_{i,j}(x_1, x_2, x_3, t)$ и $E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t)$ удобнее рассмотреть величины $Q_{i,i}(r, t)$ и $E_{i,i}(k, t)$.

Воспользуемся в выражении (3.54) полярными координатами k, φ и θ и при этом совместим полярную ось с направлением r . Тогда k будет являться радиусом-вектором в пространстве волновых чисел, θ — широтой, а φ — долготой. Следовательно,

$$dk_1 dk_2 dk_3 = k \sin \theta d\varphi k d\theta dk$$

и

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 = kr \cos \theta.$$

Тогда выражение (3.54) принимает вид

$$Q_{i,i}(r, t) = \int_0^{\infty} dk \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} E_{i,i}(k, t) k^2 \sin \theta \exp(ikr \cos \theta) d\theta,$$

откуда

$$Q_{i,i}(r, t) = 4\pi \int_0^{\infty} k^2 \frac{\sin kr}{kr} E_{i,i}(k, t) dk. \quad (3.56)$$

Аналогично из соотношения (3.55) получаем

$$E_{i,i}(k, t) = \frac{1}{8\pi^3} \int_0^{\infty} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} Q_{i,i}(r, t) r^2 \sin \theta \exp(-ikr \cos \theta) d\theta.$$

откуда

$$E_{i,i}(k, t) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty r^2 \frac{\sin kr}{kr} Q_{i,i}(r, t) dr. \quad (3.56a)$$

Теперь определим $E(k, t)$ как функцию трехмерного энергетического спектра, так чтобы

$$E(k, t) = 2\pi k^2 E_{i,i}(k, t). \quad (3.57)$$

Ввиду того, что $Q_{i,i}(0, t) = 3\bar{u}^2 = 4\pi \int_0^\infty k^2 E_{i,i}(k, t) dk$, имеем

$$\int_0^\infty E(k, t) dk = \frac{3}{2} \bar{u}^2. \quad (3.58)$$

Следовательно, из соотношения (3.56a) вытекает, что

$$E(k, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty kr \sin kr Q_{i,i}(r, t) dr, \quad (3.59)$$

и после обращения

$$Q_{i,i}(r, t) = 2 \int_0^\infty \frac{\sin kr}{kr} E(k, t) dk. \quad (3.60)$$

По уравнению (3.59) можно установить вид функции $E(k, t)$ при малых значениях k . Разложение $\sin kr$ в ряд дает

$$E(k, t) = \frac{k^2}{\pi} \int_0^\infty r^2 Q_{i,i}(r, t) dr - \frac{k^4}{3!\pi} \int_0^\infty r^4 Q_{i,i}(r, t) dr + \dots \quad (3.61)$$

Покажем теперь, что если функция $E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t)$ при $k = 0$ остается ограниченной и аналитической, то интеграл в первом члене правой части этого выражения в случае несжимаемой жидкости обращается в нуль.

Дифференцируя выражение (3.54) по x_j , имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} Q_{i,j}(x_1, x_2, x_3, t) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} ik_j E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t) \exp(ik_l x_l) dk_1 dk_2 dk_3 = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$k_j E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t) = 0. \quad (3.62)$$

Таким образом, функция $E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t)$ является изотропным тензором второго ранга, общее выражение которого [см. уравнение (3.7)] записывается в виде

$$E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t) = C_1(k^2, t) k_i k_j + C_2(k^2, t) \delta_{ij} k^2.$$

Подстановка в (3.62) приводит к соотношению

$$k_j E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t) = C_1(k^2, t) k_i k^2 + C_2(k^2, t) k^2 k_i = 0,$$

или

$$C_2(k^2, t) = -C_1(k^2, t),$$

так что

$$E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t) = C_1(k^2, t) (k_i k_j - k^2 \delta_{ij}).$$

Следовательно, для функции $E(k, t)$, согласно уравнению (3.57), имеем

$$E(k, t) = 2\pi k^2 C_1(k^2, t) (k^2 - 3k^2) = -4\pi k^4 C_1(k^2, t). \quad (3.63)$$

Таким образом,

$$E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t) = -\frac{E(k, t)}{4\pi k^2} \left(\frac{k_i k_j}{k^2} - \delta_{ij} \right). \quad (3.64)$$

Например, для $E_{1,1}(k_1, k_2, k_3, t)$ получаем

$$E_{1,1}(k_1, k_2, k_3, t) = \frac{E(k, t)}{4\pi k^2} \left(1 - \frac{k_1^2}{k^2} \right),$$

а для $E_{1,2}(k_1, k_2, k_3, t)$ —

$$E_{1,2}(k_1, k_2, k_3, t) = -\frac{E(k, t)}{4\pi k^2} \frac{k_1 k_2}{k^2}.$$

Результат, выраженный формулой (3.63), показывает, что если $C_1(k^2, t)$ достигает при $k=0$ постоянного значения, то разложение в ряд функции $E(k, t)$ начинается с члена k^4 . Это, по-видимому, действительно так, если функция $E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t)$ предполагается [11] ограниченной и аналитической относительно k_1, k_2 и k_3 при $k=0$. Пусть разложение функции $C_1(k^2, t)$ в ряд имеет вид

$$C_1(k^2, t) = C_1^{(-1)}(t) k^{-2} + C_1^{(0)}(t) + C_1^{(1)}(t) k^2 + \dots;$$

тогда нам остается показать лишь, что $C_1^{(-1)} = 0$.

Подстановка этого ряда для $C_1(k^2, t)$ в полученное выше выражение для $E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t)$ дает

$$E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t) = C_1^{(-1)}(t) \left(\frac{k_i k_j}{k^2} - \delta_{ij} \right) + C_1^{(0)}(t) (k_i k_j - k^2 \delta_{ij}) + \dots$$

Поскольку выражение $k_i k_j / k^2$ при $k=0$ не является аналитическим, так как его величина зависит от пути, по которому k стремится к нулю, то предположение об аналитичности $E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t)$ отно-

сительно k_1 , k_2 и k_3 при $k=0$ требует, чтобы $C_1^{(-1)}(t)=0$. Следовательно, при $k=0$ имеем $E(k, t) \sim k^4$.

Сравнение этого результата для $E(k, t)$ с соотношением (3.61) показывает, что в случае несжимаемой жидкости, действительно, справедливо равенство

$$\int_0^{\infty} r^2 Q_{i,i}(r, t) dr = 0. \quad (3.65)$$

Из этого результата следует также, что, по крайней мере,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^3 f(r, t) = 0, \quad (3.66)$$

потому что, согласно уравнениям (3.12) и (3.65),

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u'^2 [r^3 f(r, t)] = \int_0^{\infty} r^2 Q_{i,i}(r, t) dr = 0.$$

Если при $r \rightarrow \infty$ корреляция $f(r, t)$ монотонно стремится к нулю, то из соотношения (3.66) следует, что и

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^4 \frac{\partial f(r, t)}{\partial r} = 0.$$

Это соотношение было одним из необходимых условий, использованных для получения инварианта Лойцянского (3.39). С учетом (3.65) запишем разложение $E(k, t)$ в ряд следующим образом:

$$E(k, t) = -\frac{k^4}{3! \pi} \int_0^{\infty} r^4 Q_{i,i}(r, t) dr + \frac{k^6}{5! \pi} \int_0^{\infty} r^6 Q_{i,i}(r, t) dr - \dots \quad (3.67)$$

Соотношения между $f(r, t)$, $g(r, t)$, $E_1(k_1, t)$, $E_2(k_1, t)$ и $E(k, t)$. В предыдущем параграфе были выведены соотношения между $f(r, t)$, $g(r, t)$ и $Q_{i,i}(r, t)$. Но так как функции $\frac{1}{k} E(k, t)$ и $r Q_{i,i}(r, t)$ представляют собой нечетные преобразования Фурье, то между функцией $f(r, t)$ или ее преобразованием $E_1(k, t)$ и функцией $E(k, t)$ также должна существовать связь; по аналогичным причинам между функцией $g(r, t)$ или ее преобразованием $E_2(k, t)$ и $E(k, t)$ тоже должна иметься связь. Все эти связи могут быть получены на основании предыдущих формул. Так как эти связи могут понадобиться при вычислении одной неизвестной функции, когда другая известна, то мы приведем их здесь.

Из выражений (3.12) и (3.60) получаем

$$u'^2 f(r, t) = \frac{1}{r^3} \int_0^r r^2 Q_{i,i}(r, t) dr = \frac{2}{r^3} \int_0^r r^2 dr \int_0^{\infty} E(k, t) \frac{\sin kr}{kr} dk,$$

или

$$u'^2 f(r, t) = 2 \int_0^{\infty} E(k, t) \left(\frac{\sin kr}{k^3 r^3} - \frac{\cos kr}{k^2 r^2} \right) dk. \quad (3.68)$$

Аналогично, с помощью формулы (3.9) имеем

$$u'^2 g(r, t) = \int_0^{\infty} E(k, t) \left(\frac{\sin kr}{kr} - \frac{\sin kr}{k^3 r^3} + \frac{\cos kr}{k^2 r^2} \right) dk. \quad (3.69)$$

Обращая соотношения (3.12) и (3.59), получаем

$$E(k, t) = u'^2 \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} kr (\sin kr - kr \cos kr) f(r, t) dr. \quad (3.70)$$

Чтобы найти связь между $E_1(k_1, t)$ или $E_2(k_1, t)$ и $E(k, t)$, выберем в качестве исходного соотношения уравнение (3.12) и воспользуемся формулами (3.51) и (3.52).

Таким образом,

$$\begin{aligned} Q_{i,i}(x_1, t) &= u'^2 [f(x_1, t) + 2g(x_1, t)] = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ik_1 x_1) [E_1(k_1, t) + 2E_2(k_1, t)] dk_1, \end{aligned}$$

откуда

$$E_1(k_1, t) + 2E_2(k_1, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ik_1 x_1) Q_{i,i}(x_1, t) dx_1.$$

Дифференцируя по k_1 , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_1(k_1, t)}{\partial k} + 2 \frac{\partial E_2(k_1, t)}{\partial k_1} &= \\ &= \frac{-i^*}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \exp(-ik_1 x_1) Q_{i,i}(x_1, t) dx_1 = -\frac{2}{k_1} E(k_1, t). \end{aligned}$$

Здесь мы использовали соотношение (3.59).

С помощью выражения (3.53) находим формулу

$$E(k_1, t) = \frac{1}{2} k_1^2 \frac{\partial^2 E_1(k_1, t)}{\partial k_1^2} - \frac{1}{2} k_1 \frac{\partial E_1(k_1, t)}{\partial k_1}, \quad (3.71)$$

которая дает связь между $E(k_1, t)$ и $E_1(k_1, t)$.

Обратное соотношение может быть получено путем решения дифференциального уравнения (3.71).

Применяя метод вариации постоянных, имеем

$$E_1(k_1, t) = k_1^2 \left[\int_0^{k_1} \frac{E(k, t)}{k^3} dk + C \right] - \int_0^{k_1} \frac{E(k, t)}{k} dk + D.$$

Поскольку $\lim_{k_1 \rightarrow \infty} E_1(k_1, t) = 0$, то отсюда следует, что

$$E_1(k_1, t) = \int_{k_1}^{\infty} \frac{E(k, t)}{k} \left(1 - \frac{k_1^2}{k^2} \right) dk. \quad (3.72)$$

С помощью выражения (3.53) получаем

$$E_2(k_1, t) = \frac{1}{2} \int_{k_1}^{\infty} \frac{E(k, t)}{k} \left(1 + \frac{k_1^2}{k^2} \right) dk. \quad (3.73)$$

Физический смысл нижнего предела интегрирования в этой формуле состоит в том, что в значение длины волны $2\pi/k_1$ одномерного спектра [9] входят только те длины волн $2\pi/k$ трехмерного спектра, для которых $2\pi/k \leq 2\pi/k_1$, т. е. $k \geq k_1$ (см. рис. 3.10).

Замечания. а) На основании соотношений (3.71), (3.72) и (3.73) можно заключить, что если в диапазоне $k_1 \leq k < \infty$ функция $E_1(k_1, t)$ выражается степенным законом, то в этом случае функция $E(k_1, t)$ подчиняется тому же степенному закону, и наоборот. Для того чтобы спектральные функции могли обращаться в нуль при $k \rightarrow \infty$, показатель степени в этом степенном законе должен быть отрицательным.

б) Из формул (3.72) и (3.73) легко получить следующие соотношения между интегральными масштабами $\Lambda_f(t)$ и $\Lambda_g(t)$ и функцией $E(k, t)$:

$$\Lambda_f(t) = \frac{\pi}{2u'^2} E_1(0, t) = \frac{\pi}{2u'^2} \int_0^{\infty} \frac{E(k, t)}{k} dk, \quad (3.74)$$

$$\Lambda_g(t) = \frac{\pi}{2u'^2} E_2(0, t) = \frac{\pi}{4u'^2} \int_0^{\infty} \frac{E(k, t)}{k} dk = \frac{1}{2} \Lambda_f(t). \quad (3.75)$$

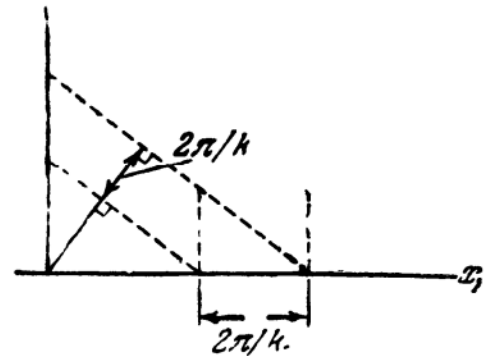


Рис. 3.10. Длины волн $2\pi/k$, содержащиеся в длине волн $2\pi/k_1$ одномерного спектра.

в) Интегрирование выражения (3.71) с учетом $\lim_{k_1 \rightarrow \infty} k_1 E(k_1, t) = 0$ приводит к формуле

$$\int_0^{\infty} E(k, t) dk = \frac{3}{2} \int_0^{\infty} E_1(k, t) dk,$$

которая находится в соответствии с определениями (3.48) и (3.58).

Рассмотрим форму спектральных функций при использовании для корреляционных функций выражений, полученных в предыдущих параграфах. Остановимся на следующих примерах.

1. Предположим, что коэффициент продольной корреляции скорости $f(x_1, t)$ описывается гауссовой кривой ошибок, определяемой уравнением (3.45):

$$f(x_1, t) = \exp\left(-\frac{x_1^2}{8\nu t}\right).$$

С помощью формулы (3.9) получаем выражение для коэффициента поперечной корреляции скорости:

$$g(x_1, t) = \left(1 - \frac{x_1^2}{8\nu t}\right) \exp\left(-\frac{x_1^2}{8\nu t}\right). \quad (3.76)$$

Это выражение показывает, что коэффициент корреляции $g(x_1, t)$ при больших значениях x_1 , в отличие от $f(x_1, t)$, становится отрицательным. Из соотношения (3.50) можно вычислить $E_1(k_1, t)$:

$$\begin{aligned} E_1(k_1, t) &= \frac{2}{\pi} u'^2 \int_0^{\infty} \cos k_1 x_1 \exp\left(-\frac{x_1^2}{8\nu t}\right) dx_1 = \\ &= u'^2 \sqrt{\frac{8\nu t}{\pi}} \exp(-2k_1^2 \nu t), \end{aligned}$$

откуда $\Lambda_f(t) = (\pi/2u'^2) E_1(0, t) = \sqrt{2\pi\nu t}$. Следовательно, $\Lambda_f(t)$ растет пропорционально $\sqrt{t}$.

Для микромасштаба турбулентности $\lambda_f(t)$ имеем

$$\lambda_f(t) = \sqrt{8\nu t}.$$

Таким образом, отношение $\lambda_f(t)/\Lambda_f(t)$ сохраняет постоянное значение.

Для функции $E_2(k_1, t)$ из (3.53) получаем

$$E_2(k_1, t) = \frac{1}{2} u'^2 \sqrt{\frac{8\nu t}{\pi}} (1 + 4k_1^2 \nu t) \exp(-2k_1^2 \nu t).$$

С помощью равенства (3.71) определяем трехмерный спектр $E(k, t)$:

$$E(k, t) = 8u'^2 v^2 t^2 \sqrt{\frac{8vt}{\pi}} k^4 \exp(-k^2 vt) = \text{const } k^4 \exp(-2k^2 vt). \quad (3.77)$$

Здесь было использовано уравнение $u'^2 = \text{const } t^{-5/2}$.

Этот результат показывает, что, подобно (3.63), зависимость $E(k, t)$ при $k \rightarrow 0$ пропорциональна k^4 , но, кроме того, он указывает на то, что функция $E(k, t)$ перестает зависеть от t . Легко проверить, что в разложении (3.61) член

$$\int_0^\infty r^2 Q_{i,i}(r, t) dr = 0,$$

тогда как следующий член $\int_0^\infty r^4 Q_{i,i}(r, t) dr \neq 0$.

Какой вид принимает при этом корреляционный тензор $Q_{i,j}(x_1, x_2, x_3, t)$ и соответствующий ему спектральный тензор $E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t)$? Из соотношения (3.8) получаем для $Q_{i,j}(x_1, x_2, x_3, t)$

$$Q_{i,j}(x_1, x_2, x_3, t) = u'^2 \left[\frac{r^2}{8vt} \frac{x_i x_j}{r^2} + \left(1 - \frac{r^2}{8vt} \right) \delta_{ij} \right] \exp\left(-\frac{r^2}{8vt}\right),$$

а из (3.64) определяем $E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t)$:

$$E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t) = -\text{const} \frac{k^2}{4\pi} \left(\frac{k_i k_j}{k^2} - \delta_{ij} \right) \exp(-2k^2 vt).$$

2. В § 1.11 упоминалось о том, что при больших числах Рейнольдса форма кривой корреляции скорости во многих случаях может быть приближенно аппроксимирована экспоненциальной функцией. Предположим здесь, что коэффициент продольной корреляции поддается подобной аппроксимации:

$$f(x_1, t) = \exp\left[-\frac{x_1}{\Delta_f(t)}\right].$$

Применяя тот же метод, что и в предыдущем примере, получаем

$$g(x_1, t) = \left(1 - \frac{x_1}{2\Delta_f} \right) \exp\left(-\frac{x_1}{\Delta_f}\right),$$

$$Q_{i,i}(x_1, t) = u'^2 \left(3 - \frac{x_1}{\Delta_f} \right) \exp\left(-\frac{x_1}{\Delta_f}\right),$$

$$E_1(k_1, t) = \frac{2}{\pi} u'^2 \int_0^\infty \cos k_1 x_1 \exp\left(-\frac{x_1}{\Delta_f}\right) dx_1 = \frac{2}{\pi} u'^2 \frac{\Delta_f}{1 + k_1^2 \Delta_f^2}$$

[ср. с уравнением (1.95)],

$$E_2(k_1, t) = \frac{1}{\pi} u'^2 \Lambda_f \frac{1 + 3k_1^2 \Lambda_f^2}{(1 + k_1^2 \Lambda_f^2)^2},$$

$$E(k, t) = \frac{8}{\pi} u'^2 \Lambda_f \frac{k^4 \Lambda_f^4}{(1 + k^2 \Lambda_f^2)^3}.$$

Этот результат также находится в соответствии с требованием, чтобы при малых значениях k функция $E(k, t)$ была пропорциональна k^4 .

§ 3.5. Динамическое уравнение энергетического спектра

Уравнение, которое описывает зависимость энергетического спектра от времени и пространственных координат, может быть выведено на основании динамического уравнения (3.32):

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_{i,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) - S_{i,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = 2\nu \frac{\partial^2}{\partial \xi_l \partial \xi_l} Q_{i,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t). \quad (3.78)$$

В предыдущем параграфе было введено преобразование Фурье $E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t)$ от корреляционного тензора $Q_{i,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$:

$$Q_{i,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t) \exp(ik_l \xi_l) dk_1 dk_2 dk_3. \quad (3.79)$$

Аналогично можем также ввести преобразование Фурье

$$F_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t) \quad \text{от} \quad S_{i,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t):$$

$$S_{i,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t) \exp(ik_l \xi_l) dk_1 dk_2 dk_3. \quad (3.80)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \xi_l \partial \xi_l} Q_{i,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) &= \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} k^2 E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t) \exp(ik_l \xi_l) dk_1 dk_2 dk_3, \end{aligned}$$

то после подстановки уравнений (3.79) и (3.80) в (3.78) получаем уравнение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ik_l \xi_l) \left(\frac{\partial}{\partial t} E_{i,j} - F_{i,j} + 2\nu k^2 E_{i,j} \right) dk_1 dk_2 dk_3 = 0,$$

которое удовлетворяется, если

$$\frac{\partial}{\partial t} E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t) = F_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t) - 2\nu k^2 E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t). \quad (3.81)$$

Спектральная функция $F_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t)$ точно так же, как $E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t)$, является симметричной функцией от k_1, k_2, k_3 . Вследствие того, что для несжимаемой жидкости выполняется соотношение

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} S_{i,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = 0,$$

которое легко получить дифференцированием по ξ_j выражения (3.33) для $S_{i,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$, функция $F_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t)$ также должна удовлетворять условию

$$k_j F_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t) = 0.$$

Тогда, как и в случае $E_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t)$, отсюда следует, что

$$F_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t) = D(k^2, t)(k_i k_j - k^2 \delta_{ij}). \quad (3.82)$$

Сведений о функции $D(k^2, t)$ можно получить гораздо больше, если при малых значениях k рассмотреть свойства тензора $F_{ik,j}(k_1, k_2, k_3, t)$, представляющего собой преобразование Фурье от $S_{ik,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$:

$$S_{ik,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int F_{ik,j}(k_1, k_2, k_3, t) \exp(ik_l \xi_l) dk_1 dk_2 dk_3.$$

Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости дает

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} S_{ik,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = 0,$$

или

$$k_j F_{ik,j}(k_1, k_2, k_3, t) = 0. \quad (3.83)$$

Общее выражение для изотропного тензора третьего ранга [см. уравнение (3.24)] записывается следующим образом:

$$F_{ik,j}(k_1, k_2, k_3, t) = \varphi_1(k^2, t) k_i k_k k_j + \\ + \varphi_2(k^2, t) k^2 k_j \delta_{ik} + \varphi_3(k^2, t) (k_k \delta_{ij} + k_i \delta_{kj}) k^2.$$

Подстановка этого выражения в формулу (3.83) приводит к соотношению

$$\varphi_2(k^2, t) \delta_{ik} = -\frac{k_i k_k}{k^2} [\varphi_1(k^2, t) + 2\varphi_3(k^2, t)],$$

так что

$$F_{ik,j}(k_1, k_2, k_3, t) = -\varphi_3(k^2, t) (2k_i k_k k_j - k^2 k_k \delta_{ij} - k^2 k_i \delta_{kj}), \quad (3.84)$$

причем $F_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t)$ является преобразованием Фурье от $S_{i,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$. Поскольку

$$S_{i,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \frac{\partial}{\partial \xi_k} (S_{ik,j} + S_{kj,i}),$$

то отсюда следует, что

$$F_{i,j} = ik_k (F_{ik,j} + F_{jk,i}).$$

Тогда при помощи соотношения (3.84) для $F_{ik,j}$ и $F_{jk,i}$ получим

$$\begin{aligned} F_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t) &= -2i\varphi_3(k^2, t)(k_i k_j - k^2 \delta_{ij})k^2 = \\ &= \varphi(k^2, t)(k_i k_j - k^2 \delta_{ij})k^2, \end{aligned}$$

а это есть не что иное, как соотношение (3.82). Выражение (3.84) для $F_{ik,j}(k_1, k_2, k_3, t)$ теперь можно записать так:

$$F_{ik,j}(k_1, k_2, k_3, t) = \varphi_3(k^2, t)k^2 \left(\delta_{jl} - \frac{k_j k_l}{k^2} \right) (k_i \delta_{lk} + k_k \delta_{li}).$$

Член $\delta_{jl} - k_j k_l / k^2$ при $k = 0$ не является аналитическим. Отсюда, если предположить, что $F_{ik,j}$ — аналитическая функция при $k = 0$, то, когда $k \rightarrow 0$, величины $\varphi_3(k^2, t)$ и $\varphi(k^2, t)$ должны быть по меньшей мере порядка k^0 , а $D(k^2, t)$, следовательно, — порядка k^2 .

В ранних теориях функция $F_{ik,j}$ принималась аналитической при $k = 0$; соответственно функция $F_{i,j}(k_1, k_2, k_3, t)$ при малых значениях k должна была быть пропорциональна $k^2(k_i k_j - k^2 \delta_{ij})$.

Однако, исходя из предположения о том, что распределение совместной вероятности компонент скорости, взятое одновременно в произвольном числе точек поля турбулентности, является нормальным, Праудмен и Райд [29] показали, что допущение об аналитичности $F_{ik,j}(k_1, k_2, k_3, t)$ неверно, хотя в то же время может выполняться предположение об аналитичности спектрального тензора $E_{l,j}(k_1, k_2, k_3, t)$. Некоторым обоснованием предположения о нормально распределенном поле скорости, по-видимому, могут служить экспериментальные результаты, полученные Юбероем для изотропной турбулентности за решеткой.

В своей недавней работе [50] Бэтчелор и Праудмен вновь пересмотрели эту проблему, начиная с самых ее основ. Из рассмотрения всех производных по времени в начальный момент они показали, что корреляция скорости $Q_{l,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$, вообще говоря, становится в области больших значений r величиной, не превышающей по порядку r^{-6} , и что спектральный тензор $E_{l,j}(k_1, k_2, k_3, t)$ является аналитической функцией и при малых значениях k имеет порядок k^2 , в то время как тензор $F_{ik,j}(k_1, k_2, k_3, t)$ изменяется пропорционально $(\delta_{jl} - k_j k_l / k^2)(k_i \delta_{lk} + k_k \delta_{li})$ и при $k = 0$ не является анали-

тической функцией. Следовательно, величина $D(k^2, t)$ в формуле (3.82) при $k \rightarrow 0$ имеет порядок k^0 .

После свертывания индексов уравнение (3.81) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} E_{i,i}(k, t) = F_{i,i}(k, t) - 2\gamma k^2 E_{i,i}(k, t).$$

Введем теперь спектральную функцию $F(k, t)$, которая определяется по аналогии с $E(k, t)$ [см. уравнение (3.57)], т. е.

$$F(k, t) = 2\pi k^2 F_{i,i}(k, t). \quad (3.85)$$

Стало быть, вместо предыдущего уравнения получаем соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t} E(k, t) = F(k, t) - 2\gamma k^2 E(k, t). \quad (3.86)$$

Поскольку $F_{i,i}(k, t) = -2k^2 D(k^2, t)$, функция $F(k, t)$ при $k \rightarrow 0$ должна изменяться пропорционально k^4 .

Функция $F(k, t)/k$ представляет собой преобразование Фурье от $rS_{i,i}(r, t)$:

$$S_{i,i}(r, t) = 2 \int_0^\infty \frac{\sin kr}{kr} F(k, t) dr \quad (3.87)$$

и

$$F(k, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty kr \sin kr S_{i,i}(r, t) dr. \quad (3.88)$$

Разложение в ряд функции $\sin kr$ дает

$$F(k, t) = \frac{k^2}{\pi} \int_0^\infty r^2 S_{i,i} dr - \frac{k^4}{3!\pi} \int_0^\infty r^4 S_{i,i} dr + \frac{k^6}{5!\pi} \int_0^\infty r^6 S_{i,i} dr - \dots$$

Но ввиду того, что, согласно вышеизложенному, ряд для $F(k, t)$ должен начинаться с k^4 , это разложение запишется следующим образом:

$$F(k, t) = \frac{k^4}{3!\pi} \int_0^\infty r^4 S_{i,i}(r, t) dr - \dots, \quad (3.89)$$

и, следовательно,

$$\int_0^\infty r^2 S_{i,i}(r, t) dr = 0, \quad (3.90)$$

но

$$\int_0^\infty r^4 S_{i,i}(r, t) dr \neq 0. \quad (3.91)$$

Теперь умножим обе части уравнения (3.34) на r^m и проинтегрируем по r от 0 до ∞ . Тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{u'^3} \int_0^\infty r^m S_{i,i} dr &= \\ &= \left[r^{m+1} \frac{\partial k}{\partial r} - (m-6) r^m k \right] \Big|_0^\infty + (m-2)(m-4) \int_0^\infty r^{m-1} k dr. \end{aligned}$$

Исходя из этого уравнения и соотношений (3.90) и (3.91), можно показать, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(r^3 \frac{\partial k}{\partial r} + r^2 k \right) = 0,$$

но

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(r^5 \frac{\partial k}{\partial r} + r^4 k \right) \neq 0.$$

Если предположить, что при больших значениях r тройная корреляция $k(r, t)$ в случае $r \rightarrow \infty$ монотонно стремится к нулю, то отсюда следует

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(r^3 \frac{\partial k}{\partial r} \right) = \lim_{r \rightarrow \infty} (r^2 k) = 0,$$

но

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (r^4 k) \neq 0.$$

Вспомним, что необходимым условием существования инварианта Лойцянского (3.39) является

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (r^4 k) = 0.$$

Но так как Бэтчелор и Праудмен показали, что $\lim_{r \rightarrow \infty} (r^4 k) \neq 0$, то

«инвариант» Лойцянского (3.39) в общем случае не является инвариантом. Однако в конечной стадии вырождения турбулентности, когда в динамическом уравнении преобладает вязкий член, интеграл Лойцянского действительно инвариантен. Это, казалось бы, противоречит полученному выше результату. Но при этом следует иметь в виду, что несуществование «инварианта» Лойцянского в общем случае вытекает из того факта, что второе условие $\lim_{r \rightarrow \infty} (r^4 k) = 0$ не

выполняется из-за влияния инерционного члена в динамическом уравнении. Ввиду того, что влияние инерционных сил в конечной стадии вырождения пренебрежимо мало, для существования инварианта Лойцянского выполнения второго условия не требуется. В самом деле,

Праудмен и Райд [29] показали, что

$$\frac{d}{dt} \left[u'^3 \lim_{r \rightarrow \infty} (r^4 \mathbf{k}) \right] > 0$$

и что

$$\frac{d^2}{dt^2} \left[u'^2 \int_0^\infty r^4 f(r, t) dr \right] > 0;$$

следовательно, величина интеграла Лойцянского (3.39) уменьшается с убывающей скоростью и в той стадии, когда влияние инерции пренебрежимо мало, а влияние вязкости становится доминирующим, оказывается постоянной.

Из уравнения (3.86) получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^k \mathbf{E}(\mathbf{k}, t) d\mathbf{k} = \int_0^k \mathbf{F}(\mathbf{k}, t) d\mathbf{k} - 2\nu \int_0^k k^2 \mathbf{E}(\mathbf{k}, t) d\mathbf{k}. \quad (3.92)$$

Покажем теперь, что если верхний предел этого интеграла простирается до $k = \infty$, то первый член в правой части обращается в нуль:

$$\int_0^\infty \mathbf{F}(\mathbf{k}, t) d\mathbf{k} = 0. \quad (3.93)$$

Из соотношения (3.87) следует, что

$$\int_0^\infty \mathbf{F}(\mathbf{k}, t) d\mathbf{k} = \frac{1}{2} \mathbf{S}_{i,i}(0, t).$$

В § 3.2 было показано, что при малых значениях r функция $\mathbf{k}(r, t)$ изменяется пропорционально r^3 [см. уравнение (3.22)] и, значит, согласно (3.34), функция $\mathbf{S}_{i,i}(r, t)$ при малых значениях r пропорциональна r^2 . Следовательно, $\mathbf{S}_{i,i}(0, t) = 0$ и уравнение (3.93) должно выполняться.

Поэтому при $k = \infty$ уравнение (3.92) запишется в следующем виде:

$$\frac{d}{dt} \int_0^\infty \mathbf{E}(\mathbf{k}, t) d\mathbf{k} = -2\nu \int_0^\infty k^2 \mathbf{E}(\mathbf{k}, t) d\mathbf{k}. \quad (3.94)$$

Левая часть уравнения (3.58) для $\mathbf{E}(\mathbf{k}, t)$ представляет собой изменение полной кинетической энергии турбулентности. Ввиду отсутствия внешних источников энергии это изменение кинетической энергии должно быть равно диссипации, обусловленной влиянием вязкости.

Покажем, что правая часть уравнения (3.94) действительно представляет собой диссипацию энергии в тепло.

Для этого обратимся к выражению для диссипации в том виде, как оно представлено 5-м членом в уравнении энергии (1.98) главы 1:

$$\text{диссипация} = \nu \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_i}}.$$

Так как при изотропной турбулентности

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2} &= \overline{\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2} = \overline{\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)^2}, \\ \overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2} &= \overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)^2} = \overline{\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2} = \dots, \\ \overline{\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_1}} &= \overline{\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \frac{\partial u_3}{\partial x_1}} = \overline{\frac{\partial u_2}{\partial x_3} \frac{\partial u_3}{\partial x_2}} = \dots, \end{aligned}$$

то получим

$$\text{диссипация } \epsilon = 6\nu \left[\overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2} + \overline{\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_1}} \right]. \quad (3.95)$$

С помощью соотношений (3.20) и (3.21) диссипацию можно выразить через величину $[\partial^2 f / \partial r^2]_{r=0}$, а именно:

$$\epsilon = -15\nu u'^2 \left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right]_{r=0} = 30\nu \frac{u'^2}{\lambda_f^2} = 15\nu \frac{u'^2}{\lambda_g^2}. \quad (3.96)$$

Из выражения (3.68) для $f(r, t)$ получаем

$$u'^2 \left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right]_{r=0} = -\frac{2}{15} \int_0^\infty k^2 E(k, t) dk,$$

так что

$$\epsilon = -15\nu u'^2 \left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right]_{r=0} = 2\nu \int_0^\infty k^2 E(k, t) dk. \quad (3.97)$$

Уравнение (3.92) можно обобщить на тот случай, когда к потоку непрерывно подводится энергия. Пусть $H_k(k, t)$ обозначает энергию, подводимую к турбулентному потоку в интервале волновых чисел спектра от 0 до k ; тогда уравнение (3.92) в обобщенном виде запишется так:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^k E(k, t) dk = \int_0^k F(k, t) dk - 2\nu \int_0^k k^2 E(k, t) dk + H_k(k, t). \quad (3.98)$$

Левая часть этого уравнения определяет изменение кинетической энергии и диссипацию в вихрях с волновыми числами от 0 до k . В таком

случае член $\int_0^k F(k, t) dk$ можно интерпретировать как перенос энер-

гии к (или от) турбулентности в этом интервале волновых чисел. Но $F(k, t)$ — спектральная функция величины $S_{i,i}(r, t)$, которая связана с тройной корреляцией $k(r, t)$ [см. уравнение (3.34)]. При рассмотрении динамического уравнения Кармана — Хауэрта (3.36) член с тройной корреляцией интерпретировался как «конвективное» воздействие на распространение двойной корреляции $f(r, t)$. Это конвективное воздействие может быть обусловлено взаимодействием

вихрей различных размеров. Аналогично функцию $\int_0^\infty F(k, t) dk$, вхо-

дящую в уравнение (3.98), можно интерпретировать как взаимодействие вихрей, соответствующих различным волновым числам, посредством которого, вследствие инерционных эффектов, осуществляется перенос энергии к вихрям (или от вихрей) в интервале волновых чисел от 0 до k . Поэтому величину $F(k, t)$ часто называют спектральной функцией переноса, с помощью которой в динамическом уравнении (3.86) учитывается результат инерционного переноса энергии. [Ср. с названием функции энергетического спектра для $E(k, t)$.]

Чтобы получить решение для $E(k, t)$, можно исходить либо из уравнения (3.86), либо из его интегральной формы (3.92). Конечно, при этом мы сразу же сталкиваемся с той же основной трудностью, с которой нам пришлось встретиться при решении динамического уравнения Кармана — Хауэрта. Здесь речь идет о спектральной функции переноса $F(k, t)$, которая в уравнениях (3.86) и (3.92) тоже является неизвестной величиной. Однако, в отличие от упомянутого случая, постулировать какую-либо соответствующую форму для функции $F(k, t)$, по-видимому, менее затруднительно. И в самом деле, было предложено несколько различных формул, которые использовались при решении динамического уравнения для спектральной функции $E(k, t)$.

Прежде чем рассматривать эти решения, обратимся к простейшему случаю, в котором взаимодействие между вихрями с различными волновыми числами пренебрежимо мало и, стало быть, обмена энергией между вихрями, обусловленного этим взаимодействием, не происходит. Другими словами, в этом случае предполагается, что членом, содержащим спектральную функцию переноса $F(k, t)$, по сравнению с другими членами уравнения, можно пренебречь. Тогда уравнение (3.86) упрощается:

$$\frac{\partial}{\partial t} E(k, t) = -2\nu k^2 E(k, t).$$

Выполняя интегрирование, находим решение этого уравнения:

$$E(k, t) = E(k, t_0) \exp[-2\nu k^2 (t - t_0)]. \quad (3.99)$$

Этот результат интересно сравнить с решением (3.77), полученным с помощью формулы для корреляции $f(r, t)$, в аналогичном случае пренебрежимо слабого взаимодействия между вихрями.

Из анализа решения (3.99) вытекают следующие интересные выводы. Уменьшение кинетической энергии по времени для вихрей с большими волновыми числами происходит с более высокой скоростью, т. е. мелкие вихри вырождаются быстрее, чем крупные. Другими словами, с увеличением волнового числа влияние времени возрастает. Наоборот, при уменьшении волнового числа функция энергетического спектра все слабее и слабее зависит от времени, а при $k = 0$ эта зависимость исчезает совсем; в этом случае $E(k, t) \sim k^4$.

Таким образом, согласно формуле (3.77), функция энергетического спектра возрастает очень быстро (в начальной стадии пропорционально k^4), достигает максимальной величины и монотонно стремится к нулю при увеличении k . При этом влияние времени на скорость вырождения тоже возрастает.

В более общем случае, когда влияние вязкости уже не является доминирующим, т. е. когда в динамическом уравнении для $E(k, t)$ приходится учитывать также и инерционный член, функция энергетического спектра приобретает приблизительно подобную форму.

Как и во всех гидродинамических процессах, характер этого течения определяется соотношением инерционных и вязких сил, т. е. числом Рейнольдса. В зависимости от свойств турбулентности, а также от того, какая область спектра турбулентности подлежит рассмотрению, для определения числа Рейнольдса турбулентности могут применяться различные характерные длины и скорости. К рассмотрению этого вопроса мы вскоре вернемся снова. Поскольку решение (3.99) получено для такого случая, в котором влияние вязкости является доминирующим, то оно, очевидно, соответствует малым значениям числа Рейнольдса.

Энергетический спектр в более общем случае больших чисел Рейнольдса являлся предметом многих теоретических и экспериментальных исследований. Вслед за работой Колмогорова [10] важный вклад в понимание механизма турбулентности *) внесли Карман, Линь, Бэтчелор, Таунсенд и другие.

Рассмотрим теперь энергетический спектр турбулентности, генерированной с помощью решетки, в том случае, когда число Рей-

*) Эти современные теории проанализированы Бэтчелором в его книге об однородной турбулентности [11]. При подготовке следующих разделов использовалось много материалов из этой книги и из работ упомянутых выше исследователей.

нольдса достаточно велико и, стало быть, инерционным членом в динамическом уравнении пренебречь нельзя.

Вследствие того, что турбулентность может образоваться только при наличии в потоке больших градиентов скорости, а также потому, что в самой зоне образования турбулентности поток является анизотропным, турбулентность на малых расстояниях вниз по течению от решетки неизотропна. Для того чтобы поток становился все более и более изотропным, требуется некоторое время, т. е. некоторое расстояние от решетки.

По мере роста турбулентности до ее полного развития крупные вихри, вследствие инерционного взаимодействия, будут порождать все более и более мелкие вихри, благодаря чему будет происходить перенос энергии к меньшим вихрям. В то же время для мелких вихрей влияние вязкости, а наряду с этим и диссипация приобретают все более и более важное значение.

В полностью развитом состоянии максимальной кинетической энергией будут обладать не наиболее крупные вихри, а вихри в интервале более высоких волновых чисел. Тот диапазон энергетического спектра, в котором эти вихри вносят наибольший вклад в кинетическую энергию турбулентности, будем называть областью энергосодержащих вихрей. В этой области энергетический спектр имеет максимум. Чтобы выделить область энергосодержащих вихрей, этому максимуму можно сопоставить некоторое волновое число k_e . Хотя наименее поддающиеся изменению самые крупные вихри и обладают значительно меньшей энергией, чем энергосодержащие вихри, их энергию ни в коем случае нельзя считать пренебрежимо малой, так как она может составлять до 20% от полной кинетической энергии.

Как упоминалось, диссипация под воздействием вязкости возрастает при уменьшении размера вихря вплоть до своего максимального значения, соответствующего определенному размеру наиболее мелких вихрей. Размеру вихрей, которыми обусловлена основная часть полной диссипации, здесь тоже можно сопоставить некоторое волновое число k_d . Это значение k_d будет приблизительно соответствовать максимуму кривой в координатах $[k^2 E(k, t), k]$. Диссипация будет проявляться в непрерывном убывании полной кинетической энергии турбулентности, точнее, вырождающейся турбулентности, если отсутствуют какие-либо источники энергии. Процесс вырождения происходит с определенной скоростью. Попытаемся сравнить скорость процесса вырождения со скоростями турбулентных пульсаций, соответствующих рассматриваемым волновым числам энергетического спектра.

На нижнем пределе области волновых чисел, соответствующем наиболее крупным вихрям, «частота» $u'_k k$ этих вихрей очень мала по сравнению со скоростью вырождения полной кинетической энергии турбулентности, выраженной через относительную скорость ее

изменения

$$\frac{du'^2/dt}{u'^2}.$$

На другом пределе области волновых чисел наиболее мелкие вихри по сравнению с относительной скоростью изменения полной турбулентности будут иметь очень высокую частоту $u'_k k_d$.

В промежутке между этими пределами находится область волновых чисел, для которой «частоты» вихрей $u'_k k$ имеют тот же порядок, что и относительная скорость изменения полной турбулентности. Логично ожидать, что это будет наблюдаться в области энергосодержащих вихрей, так как именно эти вихри обеспечивают основной вклад в полную энергию турбулентности, а относительная скорость изменения этой полной энергии поэтому тесно связана с «частотой» этих вихрей:

$$\frac{1}{u'^2} \frac{du'^2}{dt} \sim -u'_k k_e. \quad (3.100)$$

Следовательно, вне этой области в направлении возрастания волновых чисел процесс вырождения можно считать относительно медленным по сравнению с движением вихрей. Иначе говоря, в области более высоких значений волновых чисел турбулентность может приближенно считаться статистически стационарной, а скоростью изменения осредненных величин можно пренебречь.

Вихри, соответствующие этим более высоким волновым числам, возбуждаются благодаря переносу энергии инерционными силами от более крупных вихрей. Можно предполагать, что в отличие от наиболее крупных вихрей эти, намного меньшие вихри не подвержены влиянию внешних условий, порождающих силы, под воздействием которых образуются исходные крупные вихри. Это предположение подкрепляется тем экспериментальным фактом, что даже в анизотропном турбулентном потоке область турбулентности, соответствующая высоким значениям волновых чисел, обладает почти полной изотропностью.

Таким образом, турбулентность в области больших волновых чисел можно считать не только статистически стационарной по ее осредненным параметрам, но также и независимой от внешних условий. Поэтому характер турбулентности в этой области может определяться только параметрами, связанными с внутренними условиями. Оказывается, что таких параметров существует только два.

Рассмотрим настолько большое число Рейнольдса, чтобы область энергосодержащих вихрей и область максимальной диссипации находились достаточно далеко друг от друга и, следовательно,

$$k_\epsilon \ll k_d.$$

В области $k \gg k_e$ вихри получают энергию благодаря инерционному переносу ее от более крупных вихрей, а крупные вихри, в свою очередь, переносят энергию к более мелким вихрям. В то же время происходит диссипация некоторой части энергии в вихрях. Таким образом, во всей области волновых чисел имеется непрерывный поток энергии и непрерывная диссипация, причем последняя нарастает с увеличением значения волнового числа.

В этой области количество энергии, переданной через вихри, велико по сравнению со скоростью изменения их энергии; следовательно, эти вихри можно рассматривать как находящиеся в статистическом равновесии друг с другом.

Очевидно, что характер турбулентности в этой области полностью определяется потоком энергии через эту область и скоростью диссипации. Сумма потока энергии и диссипации должна равняться полному притоку энергии к этой области. Если пренебречь диссипацией энергии в области низких значений волновых чисел $k < k_e$, то полный приток энергии в области равновесия практически равен величине

$$\epsilon(t) = -\frac{3}{2} \frac{du'^2}{dt} = 2\nu \int_0^{\infty} k^2 E(k, t) dk. \quad (3.101)$$

Отсюда следует, что характер турбулентности в этой области определяется величиной $\epsilon(t)$, которая является одним из двух упомянутых выше параметров, и коэффициентом вязкости ν — вторым из этих параметров, поскольку он тоже определяет скорость диссипации.

Этот анализ привел Колмогорова к следующей гипотезе:

«При достаточно больших числах Рейнольдса существует область высоких значений волновых чисел, в которой турбулентность находится в статистическом равновесии и однозначно определяется величинами ϵ и ν . Это состояние равновесия является универсальным».

Эта равновесная область называется «универсальной» потому, что турбулентность в этой области не зависит от внешних условий, а любое изменение эффективных масштабов длины и времени для этой турбулентности может быть только результатом влияния параметров ϵ и ν .

Следуя Колмогорову, вместо масштаба времени выберем масштаб скорости, так как это представляется более удобным. Из соображений размерности получаем:

$$\text{масштаб длины: } \eta = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4}, \quad (3.102a)$$

$$\text{масштаб скорости: } v = (\nu \epsilon)^{1/4}. \quad (3.102b)$$

Следовательно, масштабы длины η и скорости v таковы, что отнесенное к ним число Рейнольдса

$$\frac{v\eta}{\nu} = 1.$$

Волновое число k_d , при котором влияние вязкости становится очень сильным, будет иметь порядок $1/\eta$. Величину k_d принято определять так, чтобы она удовлетворяла точному равенству

$$k_d = \frac{1}{\eta}. \quad (3.103)$$

Однако тогда величина k_d уже больше не соответствует максимуму кривой диссипации. Таунсенд [52] показал, что основная доля вязкой диссипации приходится на область $k_\eta < 0,5$, причем максимум ее достигается при $k_\eta \approx 0,2$.

С другой стороны области равновесия имеем волновое число k_e , фиксирующее область энергосодержащих вихрей. Определим длину l_e равенством

$$k_e = \frac{1}{l_e},$$

так что l_e можно интерпретировать как средний размер энергосодержащих вихрей.

Выше уже были введены следующие важные параметры, характеризующие турбулентность: интенсивность u' , масштаб диссипации λ_f и интегральный масштаб Λ_f . Поскольку, вслед за Дж. Тэйлором, вместо λ_f принято пользоваться величиной λ_g , то в дальнейшем изложении мы не будем отступать от этой традиции.

Возникает вопрос: как все эти величины связаны с только что введенными параметрами v , η и l_e ?

Есть основания полагать, что величина Λ_f , которая определяется главным образом размером крупных энергосодержащих вихрей, имеет такой же порядок, как и средний размер l_e этих вихрей. Кроме того, можно ожидать, что соотношения между u' и v , а также между l_e и η будут зависеть от числа Рейнольдса турбулентности.

Мы уже упоминали о числе Рейнольдса v_η/ν , которое, будучи в точности равным единице, фиксирует только область сильного влияния вязкости, где инерционные силы имеют ту же величину, что и сдвигающие усилия. Стало быть, для характеристики турбулентности в других частях области волновых чисел одного только этого числа Рейнольдса недостаточно. Для этой цели, по-видимому, подходят два других числа Рейнольдса, которые могут быть составлены из перечисленных выше параметров, а именно:

$$\text{Re}_\lambda = \frac{u'\lambda_g}{\nu}, \quad \text{Re}_l = \frac{u'l_e}{\nu}. \quad (3.104)$$

Чтобы получить соотношения между Re_λ , Re_l , u' , v , l_e , λ_g и η , следует вспомнить, что эти параметры частично относятся к области волновых чисел с максимальной диссипацией, а частично — к области волновых чисел, соответствующей энергосодержащим вихрям. Для этих двух областей параметр ϵ является определяющим, так как величина ϵ , с одной стороны, практически равна диссипации в области наибольших волновых чисел, а с другой стороны, практически равна работе, производимой энергосодержащими вихрями, которые осуществляют подвод энергии к более мелким вихрям.

Уже было показано, что полную диссипацию можно выразить через u' и λ_g :

$$\epsilon = 15\nu \frac{u'^2}{\lambda_g^2}; \quad (3.96)$$

но, с другой стороны, работа на единицу массы в единицу времени может быть записана в следующей форме:

$$\epsilon = A \frac{u'^3}{l_e}, \quad (3.105)$$

где A — численный коэффициент порядка единицы [ср. с соотношениями (3.100) и (3.101), из которых вытекает (3.105)].

Легко убедиться в том, что, согласно уравнениям (3.96) и (3.105), соотношения между Re_λ , Re_l , u' , v , l_e , λ_g и η имеют вид

$$Re_l = \frac{A}{15} Re_\lambda^2, \quad (3.106)$$

$$\frac{u'}{v} = 15^{-1/4} Re_\lambda^{1/2}, \quad (3.107)$$

$$\frac{\lambda_g}{\eta} = 15^{1/4} Re_\lambda^{1/2}, \quad (3.108)$$

$$\frac{l_e}{\lambda_g} = \frac{A}{15} Re_\lambda, \quad (3.109)$$

$$\frac{l_e}{\eta} = 15^{-3/4} A Re_\lambda^{3/2}. \quad (3.110)$$

Теперь с помощью соотношения (3.110) можно более точно определить условие существования области равновесия. Для волновых чисел, принадлежащих к этой области, имеем $k \gg k_e$ и, тем более,

$$k \ll k_d.$$

Это условие можно выразить через l_e и η следующим образом:

$$l_e \gg \eta,$$

откуда, согласно (3.110),

$$Re_\lambda^{3/2} \gg 1. \quad (3.111)$$